

Logique formelle

Programme de 1^{ère}

Collegium Logicum

Matériel complémentaire

Logique des Propositions

Transcriptions

Méthode des arbres

Logique des Prédicats

Transcriptions

Méthode des arbres

Déductions

Preuve Simple

Preuve Conditionnelle

Réduction à l'absurde

1. Définition

La logique est la science qui enseigne à raisonner juste. Il s'agit d'une science formelle dépourvue de contenu, qui a pour objectif de mettre à jour les opérations de la pensée et d'établir les règles auxquelles elles doivent obéir. Autrement dit, c'est l'étude des méthodes et des principes utilisés pour distinguer le raisonnement correct de l'incorrect.

L'étymologie montre que le concept de logique dérive du terme grec *logikós* (de *logos*, « raison »). Aristote est considéré le père de la logique formelle, dont les principes sont encore valables à ce jour. Dans son œuvre **Organon** (« outil » en grec ancien) Aristote y expose de manière systématique les formes de la pensée. La logique est donc un outil qui nous permet de démontrer la validité d'un raisonnement. Un outil qui est depuis plus de deux millénaires au service de la pensée et de sa clarification.

1.1. Le langage

Notre langage et nos expressions linguistiques nous permettent d'exprimer nos pensées et nos raisonnements. Le langage est donc basé sur des structures logiques. Ainsi nous pouvons distinguer :

- Les expressions vides de sens : oeroe gleu meuf leu
- Les énoncés (dt. Aussage) impératifs : Sois belle et tais-toi !
- Les énoncés interrogatifs : Fera-t-il beau ?
- Les énoncés qui décrivent **un état de choses** : Le ciel est gris.
↳ Ce type d'énoncé possède une caractéristique que ne possèdent pas les énoncés précédents : il peut être vrai ou faux ! On appellera un tel énoncé une **proposition**.

1.2. Le raisonnement

La logique consiste à vérifier si une conclusion est bien reliée aux prémisses. Reasonner c'est donc tirer une Proposition nouvelle d'une ou de plusieurs propositions déjà admises.

Exemple :

(1) Tous les hommes sont mortels.

Prémisses

(2) Socrate est un homme.

Ce qui est envoyé vers l'avant (=vorausgeschickt)

(3) **Donc** Socrate est mortel.

Conclusion

Ce qui peut être déduit des prémisses

1.3. Valide et vrai

La logique est une science formelle dépourvue de contenu. Le travail du logicien consiste à s'intéresser à l'aspect formel du raisonnement. Il n'est pas de son ressort de déterminer si les prémisses sont vraies ou non. Il faut donc distinguer si un raisonnement est valide ou s'il est vrai :

Valide	Vrai
<p>Un raisonnement est valide, si la déduction est faite correctement, si donc la conclusion peut être tirée des prémisses données.</p> <p>Exemple :</p> <ul style="list-style-type: none">(1) Tous les hommes sont immortels.(2) Socrate est un homme.(3) Donc Socrate est immortel. <p>Le raisonnement est valide, mais les prémisses sont fausses. La <i>forme</i> est valide, mais le <i>contenu</i> est faux.</p>	<p>Un raisonnement est vrai, si <u>à la fois</u> la déduction est valide <u>et</u> que les prémisses sont effectivement vraies.</p> <p>Exemple :</p> <ul style="list-style-type: none">(1) Tous les hommes sont mortels.(2) Socrate est un homme.(3) Donc Socrate est mortel. <p>Le raisonnement est valide <u>et</u> les prémisses sont vraies. La <i>forme</i> est valide et le <i>contenu</i> est vrai.</p>

1.4. Exercice :

Formulez d'autres exemples pour un raisonnement valide et un raisonnement vrai :

Valide	Vrai
<hr/> <hr/> <hr/> <hr/> <hr/> <hr/> <hr/>	<hr/> <hr/> <hr/> <hr/> <hr/> <hr/> <hr/>

2. Les paralogismes

D'une manière générale on appellera «paralogisme» un raisonnement qui est non-valide. Plusieurs cas sont alors envisageables:

- la fausseté résulte d'une déduction faite selon des règles non acceptées;
- la fausseté résulte d'éléments non explicitement contenues dans les prémisses;
- la fausseté résulte d'une déduction faite à partir d'un changement du sens
- des prémisses en cours de déduction.

Dans une société où être persuasif est d'une importance capitale (pensons à la place de la publicité dans l'économie d'aujourd'hui), les paralogismes seront fréquents, au point qu'il est permis de se demander s'ils ne sont pas autant de sophismes...

Quelques exemples :

- **L'appel à l'autorité**

On commet le paralogisme de «*l'appel à l'autorité*», lorsqu'on raisonne de la façon suivante:

⇒ Le **président** affirme que cette information est vraie. Donc, cette information est vraie.

- **L'appel à l'accord général**

Dans certains cas, l'expert est remplacé par un groupe d'experts, par un groupe de personnes ou même par l'humanité en général. Dans ce cas, l'appel à l'autorité se transforme dans «*l'appel à l'accord général*».

- **L'argumentum ad hominem**

L'«*argumentum ad hominem*» (contre la personne) a la même prémisse que l'appel à l'autorité, mais de cette prémisse, il entend tirer la fausseté de la proposition avancée:

⇒ **A** a intérêt à ce que **p** soit accepté comme vrai. Donc **p** est faux.

- **Le paralogisme de l'accident**

On commet le paralogisme de «*l'accident*» en appliquant une règle générale à un cas particulier dont les circonstances accidentelles rendent la règle inapplicable.

⇒ Tous ceux qui frappent délibérément une autre personne devraient être sévèrement punis. Ce champion de boxe devrait se trouver en prison.

- **Les paralogismes de la cause et de la corrélation**

Il y a différentes manières de s'abuser ou d'abuser les autres en raisonnant à l'aide de la relation causale.

⇒ Il a été constaté que les célibataires consommaient plus de sucreries que les gens mariés. Donc, si je me marie je consomme moins de sucreries.

- **La question complexe**

Certaines questions semblent appeler une réponse simple, alors qu'en fait ce sont des questions complexes exigeant une réponse complexe.

Continuez-vous à battre votre femme?

(Oui) / (Non)

Donc vous avez battu votre femme!

3. Notation et transcription

Ne s'intéressant pas au contenu des propositions, mais à leur structure, la logique a intérêt à symboliser les propositions utilisées. Sans symbolisation, il devient très difficile de relever et de dégager les structures des propositions ou de les relier entre elles dans des raisonnements. Il n'y a qu'à considérer l'exemple des mathématiques : « 25 : 2 » est plus facile à manier que « vingt-cinq divisé par deux ».

Nous appellerons **transcription** le fait de traduire une proposition d'un langage naturel dans un langage symbolique.

- Exemples :

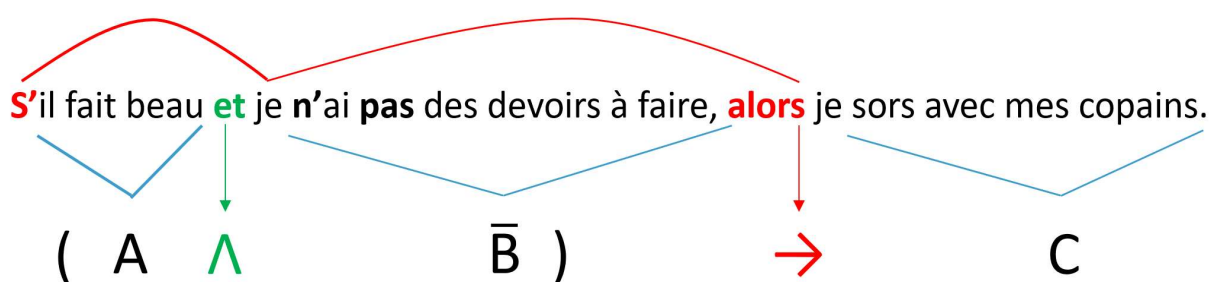
« Le ciel est gris » est une proposition élémentaire qu'on symbolise par A, B, C, etc...

« Le ciel n'est pas gris » est la négation d'une proposition élémentaire qui modifie la valeur de vérité de la proposition. La négation est symbolisée par « \neg » et se note « \bar{A} » (non-A).

Les propositions complexes sont composées de plusieurs propositions élémentaires qui sont liées par un **opérateur logique** :

Langage naturel	Opérateur logique	Symbole	Transcription
Le ciel est gris et il pleut.	Conjonction	\wedge	$A \wedge B$
Le ciel est gris ou il fait beau.	Disjonction	\vee	$A \vee B$
S' il fait beau, alors je sors avec mes copains.	Implication	\rightarrow	$A \rightarrow B$
Etre de mauvaise humeur est équivalent à être grincheux.	Équivalence	\leftrightarrow	$A \leftrightarrow B$
..., donc je suis heureux	Conclusion	\vdash	$\vdash A$

- Exemple complexe :



S'il fait beau et je n'ai pas des devoirs à faire, alors je sors avec mes copains.

Lexique :

A = Il fait beau

B = J'ai des devoirs à faire

C = Je sors avec mes copains

Transcription :

3.1. Exercice

- Établissez le lexique et la transcription du texte suivant :

*Der Philosoph der tritt herein
und beweist Euch es müsst so sein :*

Das Erst' wär so, das Zweite so, (1) Prémisse
Und drum das Dritt' und Vierte so,

Und wenn das Erst' und Zweit' nicht wär', (2) Prémisse

Das Dritt' und Viert' wär' nimmermehr. (3) Conclusion

- Goethe: Faust

Lexique :

A = _____

B = _____

C = _____

D = _____

Transcription :

(1)

(2)

(3)

- Déterminez si le raisonnement est valide :

La transcription correspond au schéma suivant :

Etablissons un nouveau lexique afin de mieux discerner le raisonnement :

Solution :

4. Exercices préliminaires

Proposition	Symbolisation
1) Le gâteau est bon.	
2) Il ne va pas aller en vacances.	
3) Les élèves sont intelligents et gentils.	
4) Si tu manges trop de chocolat, alors tu auras mal au ventre.	
5) Uniquement si les prix sont bas, ils attirent les clients.	
6) Au cas où il pleut, alors on ne va pas aller à la plage.	
7) Si Julie va au cinéma et n'est pas à l'école, alors elle est en vacances.	

- Exercice TR 2 (p.103)

Lexique :

(1) Si les élèves étudient les mathématiques et l'économie politique, alors ils étudient la philosophie ou le français.

(2) Or, il n'est pas vrai que s'ils étudient la philosophie, ils n'étudient pas l'économie politique.

└ Donc, ils étudient les mathématiques ou le français.

Lexique de symbolisation

<p>La négation : \bar{p}</p> <p>il est faux que p</p> <p>non p</p> <p>p ne...pas</p> <p>il n'est pas vrai que p</p>	<p>La conjonction : $p \wedge q$</p> <p>p et q</p> <p>p alors que q</p> <p>p bien que q</p> <p>p en plus de q</p> <p>p mais (aussi) q</p> <p>non seulement p mais aussi q</p> <p>p quoique q</p>	<p>La disjonction : $p \vee q$</p> <p>p ou q</p> <p>p à moins que (ne) q¹</p> <p>ou bien p ou bien q</p> <p>p sauf q</p>
<p>L'implication : $p \rightarrow q$</p> <p>Condition suffisante (CS)</p> <p>p implique q</p> <p>p entraîne q</p> <p>p est la condition suffisante de q</p> <p>si p alors q</p> <p>q, si p</p> <p>au cas où p, alors q</p> <p>il suffit que p, pour que q</p> <p>p à condition que q</p> <p>q pourvues que p</p>	<p>L'implication : $q \rightarrow p$</p> <p>Condition nécessaire (CN)</p> <p>p est la condition nécessaire de q</p> <p>q seulement si p</p> <p>ne que q si p</p> <p>sans p pas de q</p> <p>pour que q, il faut que p</p> <p>q à la seule condition que p</p> <p>uniquement si p, alors q</p>	<p>L'équivalence : $p \leftrightarrow q$</p> <p>p est la condition nécessaire et suffisante de q</p> <p>p est la condition nécessaire et suffisante de p</p> <p>p si et seulement si q</p> <p>p est équivalent à q</p> <p>il faut et il suffit que p pour que q</p>

¹ Pour plus d'explications voir livre p. 64.

- **Condition suffisante (CS)**

« Il suffit que **p** soit, pour que **q** soit » ne signifie pas que **p** doit nécessairement être vrai, **q** peut aussi être vrai (pour d'autres raisons) alors que **p** est faux.

La condition suffisante est toujours transcrite par l'**antécédent** de l'implication.

Exemple :

S'il fait beau, alors je vais au bois.

Lexique :

A = Il fait beau

B = Je vais au bois

Transcription :

$A \rightarrow B$

CS

$A \rightarrow B$
B, si A
si A, alors B
B pourvu que A
A implique B
A entraîne B
A est la condition suffisante de B
au cas où A, alors B
il suffit de A pour B
A à condition que B

- **Condition nécessaire (CN)**

Dire que **p** est une condition nécessaire pour **q** signifie que pour que **q** soit réalisée, il faut que **p** le soit aussi. « **Seulement** s'il fait beau, alors j'irai au bois » est beaucoup plus fort que « s'il fait beau, je vais au bois ». Le mot « seulement » exclut toute autre possibilité. On peut aussi dire « si je vais au bois, c'est qu'il fait beau ».

La condition nécessaire est toujours transcrite par le **conséquent** de l'implication et l'**antécédent** se trouve toujours **après** l'implication.

Exemple :

Seulement s'il fait beau, alors je vais au bois.

Lexique :

A = Il fait beau

B = Je vais au bois

Transcription :

$B \rightarrow A$

CN

$B \rightarrow A$
B seulement si A
pour B, il faut A
A est la condition nécessaire de B
ne que B si A
sans A pas de B
seul A, B

- **Condition nécessaire et suffisante (CNS)**

La CNS se reconnaît au fait qu'on peut la décomposer en deux implication inverses. « *Un nombre est divisible par deux, si et seulement s'il est pair* » signifie aussi bien « si un nombre est divisible par deux, alors il est pair » que « si un nombre est pair, alors il est divisible par deux ». « Être pair » et « être divisible par deux » sont synonymes et interchangeables.

Lexique :

A = Être divisible par deux

B = Être pair

Transcription :

$A \leftrightarrow B$ (CNS)

Exercice 1 – Transcrivez le raisonnement suivant

Si Antoine travaille beaucoup, il pourra acheter une voiture, et si Julie étudie beaucoup, elle aura son diplôme. Donc, si Antoine travaille beaucoup, Julie aura son diplôme, ou si Julie étudie beaucoup, Antoine pourra acheter une voiture.

Lexique : A = Antoine travaille beaucoup B = Antoine achète une voiture C = Julie étudie beaucoup D = Julie a son diplôme	Transcription :
--	------------------------

Exercice 2 - Etablissez un lexique pour les propositions suivantes, puis transcrivez-les :

- a) David et René prirent le café et Emmanuel fit de même.
- b) David prit le café, et René ou Emmanuel aussi.
- c) David et René ont dîné tous les deux, ou bien David et Emmanuel prirent le café.
- d) David a dîné, ainsi que Emmanuel ou René

Lexique :	Transcription :
a) A = David prend le café B = René prend le café C = Emmanuel prend le café	
b) A = David prend le café B = René prend le café C = Emmanuel prend le café	
c) A = David dine B = René dine C = David prend le café D = Emmanuel prend le café	
d) A = David dine B = Emmanuel dine C = René dine	

Exercice 3 - Transcrivez le raisonnement suivant

Un élève malade ne peut passer son examen. Si l'élève mange du sushi ce midi, il risque une intoxication alimentaire et il sera malade. Il va aller manger du sushi ce midi. Donc, il ne passera pas l'examen.

<p>Lexique :</p> <p>A = L'élève est malade B = L'élève passe son examen C = L'élève mange du sushi le midi D = L'élève risque une intoxication</p>	<p>Transcription :</p>
--	------------------------

Exercice 4 - Transcrivez le raisonnement suivant

Si Bonnie n'a pas rencontré Clyde dans la ruelle la nuit du vol, c'est que Clyde est le voleur ou que Bonnie est une menteuse. Si Clyde n'est pas le voleur, alors Bonnie ne l'a pas rencontré la nuit du vol et le crime a été commis après minuit. Si le crime a eu lieu après minuit, alors Clyde est le voleur ou Bonnie a menti. Donc, Clyde est le voleur.

<p>Lexique :</p> <p>A = Bonnie rencontre Clyde dans la ruelle la nuit du vol B = Clyde est le voleur C = Bonnie est une menteuse D = Le crime a été commis après minuit</p>	<p>Transcription :</p>
---	------------------------

Transcriptions : Exercices 2

Exercice 5

Transcrivez le raisonnement suivant :

Je doute. Je doute seulement si je pense. Si je ne pense pas, je n'existe pas. Je n'existe pas à moins que je ne doute. Or, douter est équivalent à exister. Donc, j'existe.

Lexique :	Transcription :

Exercice 6

Transcrivez le raisonnement suivant :

Si Descartes n'est pas un sceptique, alors le doute cartésien est provisoire et si Descartes est un rationaliste, il est d'avis que toute connaissance certaine est a priori. Seulement si Descartes n'est pas un sceptique et s'il est un rationaliste, il trouvera une vérité certaine. Donc, si Descartes n'est pas d'avis que toute connaissance certaine est a priori, il ne trouvera pas une vérité certaine.

Lexique :	Transcription :

Exercice 7

Transcrivez le raisonnement suivant :

Descartes n'est pas un rationaliste à moins qu'il n'affirme l'existence des idées innées. Hume est un empiriste et toute connaissance est a posteriori. Seulement si les idées innées n'existent pas, alors Hume a raison. Il est vrai que les idées innées n'existent pas. Donc, Hume a raison et toute connaissance est a posteriori.

Lexique :	Transcription :
A = Descartes est un rationaliste B = Descartes affirme l'existence des idées innées C = Hume est un empiriste D = Toute connaissance est a posteriori E = les idées innées existent F = Hume a raison	

Transcriptions : Exercices 2

Exercise 8

Transcrivez le raisonnement suivant :

Nous ne sortons pas de la cave à moins de pouvoir apprécier le soleil. Mais pour que nous verrons le soleil, il faut que nous ayons le courage et que nous persuadions nos amis. Ou nos amies aiment voir le soleil, ou ils seront fâchés si nous les persuadons. Si nos amis sont fâchés, ils veulent nous tuer. Donc, nous sortons de la cave seulement si nos amis aiment voir le soleil.

Lexique :	Transcription :
-----------	-----------------

Exercise 9

Transcrivez le raisonnement suivant :

Il n'est pas vrai que Christelle s'intéresse à la philosophie sans assister à des cours de philosophie. Elle n'assiste à des cours de philosophie que si elle a assez de motivation. Elle n'a pas assez de motivation à moins qu'elle ne lit Descartes et n'achète pas régulièrement des macarons. Donc, il est faux qu'uniquement si Christelle n'achète pas régulièrement des macarons, alors elle s'intéresse à la philosophie.

Lexique :	Transcription :
-----------	-----------------

Exercice 10

Transcrivez le raisonnement suivant :

Si Joanne ne fait pas du shopping, elle mange des macarons ou elle fait ses exercices de logique, à moins qu'elle ne téléphone avec Hannah. Il n'est pas vrai qu'elle puisse à la fois faire ses exercices de logique, manger des macarons et téléphoner avec Hannah. Or, elle téléphone toujours avec Hannah si celle-ci a besoin d'elle. Elle fait ses exercices de logique ou elle mange des macarons seulement si elle ne téléphone pas avec Hannah. Donc, il est faux qu'elle fasse ses exercices de logique ou qu'elle mange des macarons si Hannah a besoin d'elle.

Lexique :	Transcription :

Exercice 11

Transcrivez le raisonnement suivant :

Si nous n'aidons pas les réfugiés de la guerre civile syrienne, c'est que nous n'avons pas eu de pitié. Nous n'avons pas eu de pitié sans que les médias aient montré la situation de détresse. Nous nous apprêtons à ignorer le malheur des réfugiés à moins que les médias n'aient montré la situation de détresse. Donc, nous nous apprêtons à ignorer le malheur des réfugiés pourvue que nous n'aidons pas les réfugiés de la guerre civile syrienne.

Lexique :	Transcription :