La méthode des arbres en logique des propositions

Logique des propositions: la méthode des arbres (MA)

1. <u>Définition</u>

La méthode des arbres (MA) est une méthode pour vérifier si un raisonnement logique est valide ou non.

2. <u>Principe</u>

Normalement, afin de vérifier un raisonnement logique, il faut établir une « table de vérité », qui donne la valeur de vérité des propositions complexes à partir des valeurs de vérité des propositions élémentaires qui la composent.

- Par exemple :

« Le soleil brille et il fait chaud. »

Quand est-ce qu'on peut dire que cette proposition complexe est vraie dans son ensemble ?

- Table de vérité :

p = le soleil brille	q = il fait chaud	$p \wedge q$ = le soleil brille et il fait chaud
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

On peut donc constater que cette proposition complexe est vraie si et seulement si ses propositions élémentaires (p et q) sont vraies aussi.

- Problème :

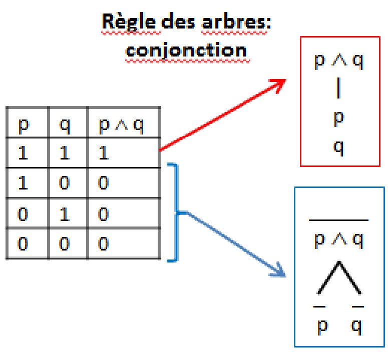
Or, pour des propositions encore plus complexes qui sont composées d'une multitude de propositions élémentaires le nombre de lignes dans notre tableau de vérité augmente d'une façon exponentielle. Ceci n'est guère efficace.

- Solution :

On utilise la méthode des arbres! Cette méthode consiste en l'admission par hypothèse que le raisonnement n'est pas valide et que la conclusion est donc fausse.

Dans cette situation, deux cas sont donc possibles :

1. L'hypothèse de la fausseté de la conclusion mène dans tous les cas à des contradictions. ➔ Ceci signifie donc qu'il faut admettre le contraire de notre hypothèse (que la conclusion est vraie).
2. L'hypothèse ne produit pas toujours des contradictions. ➔ Ceci signifie donc que notre hypothèse doit être vraie (que la conclusion et le raisonnement sont faux).



3. <u>Méthode des arbres : les règles de décomposition</u>

	Règle	Table de vérité			Explication
Formes conjonctives	Conjonction $p \wedge q$ $\vert$ p q	p 1 1 0 0	q 1 0 1 0	$p \wedge q$ 1 0 0 0	Si une conjonction est vraie, alors p et q sont vrais.
	Disjonction niée $\overline{p \vee q}$ $\vert$ $\overline{p}$ $\overline{q}$	p 1 1 0 0	q 1 0 1 0	$\overline{p \vee q}$ 0 0 0 1	Si une disjonction est fausse, alors p et q sont faux.
	Implication niée $\overline{p \rightarrow q}$ $\vert$ P $\overline{q}$	p 1 1 0 0	q 1 0 1 0	$\overline{p \rightarrow q}$ 0 1 0 0	Si une implication est fausse, alors p est vrai et q est faux.
Formes disjonctives	Implication $p \rightarrow q$ $\wedge$ $\overline{p}$ q	p 1 1 0 0	q 1 0 1 0	$p \rightarrow q$ 1 0 1 1	Si une implication est vraie, alors ou bien p est faux ou bien q est vrai.
	Disjonction $p \vee q$ $\wedge$ p q	p 1 1 0 0	q 1 0 1 0	$p \vee q$ 1 1 1 0	Si une disjonction est vraie, alors p ou q est vrai.
	Conjonction niée $\overline{p \wedge q}$ $\wedge$ $\overline{p}$ $\overline{q}$	p 1 1 0 0	q 1 0 1 0	$\overline{p \wedge q}$ 0 1 1 1	Si une conjonction est fausse, alors ou bien q est faux ou bien p est faux.
	Equivalence $p \leftrightarrow q$ $\wedge$ $\overline{p}$ p $\overline{q}$ q	p 1 1 0 0	q 1 0 1 0	$p \leftrightarrow q$ 1 0 0 1	Si une équivalence est vraie, alors ou bien p et q sont vrais ou bien p et q sont faux.
	Equivalence niée $\overline{p \leftrightarrow q}$ $\wedge$ p $\overline{p}$ $\overline{q}$ q	p 1 1 0 0	q 1 0 1 0	$\overline{p \leftrightarrow q}$ 0 1 1 0	Si une équivalence est fausse, alors ou bien p est vrai et q est faux ou bien p est faux et q est vrai.

4. De la symbolisation à la méthode des arbres

Supposons le raisonnement suivant :

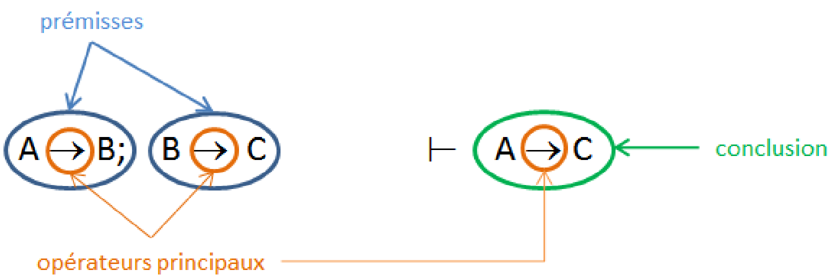
Si Suzanne part en vacances, alors elle s'amuse.

Si Suzanne s'amuse, elle est contente.

Donc, si Suzanne part en vacances, elle est contente.

Lexique :	Transcription :
A = Suzanne part en vacances	1. $A \to B$
B = Suzanne s'amuse	2. $B \to C$
C = Suzanne est contente	|-- $A \to C$

Vérifions donc par la méthode des arbres, si le raisonnement est valide ou non:



Étape 1

Copiez les prémisses l'une en dessous de l'autre, de façon à ce que les opérateurs principaux soient centrés verticalement.

$A \to B$

$B \to C$

$\overline{A \to C}$

Étape 2

Ajoutez la conclusion **niée**.

Étape 3

Décomposez successivement les formules conformément aux règles de décomposition (cf. feuille).

Inscrivez le résultat de la décomposition sur toutes les branches ouvertes sur lesquelles figure la formule à décomposer (ici, il y a seulement une branche).

Pour éviter d'avoir trop d'embranchements il faut d'abord **privilégier les règles de forme conjonctive** (conjonction, disjonction niée et implication niée).

Ici, on commence donc par la 3ème formule.

$A \to B$

$B \to C$

$\overline{A \to C}$ ✔ 1

|

A

$\overline{C}$

Notation qui veut dire:
« J'utilise cette formule en 1er lieu. »

Règle de décomposition en question

Implication niée

$\overline{p \to q}$

|

p

$\overline{q}$

Étape 4

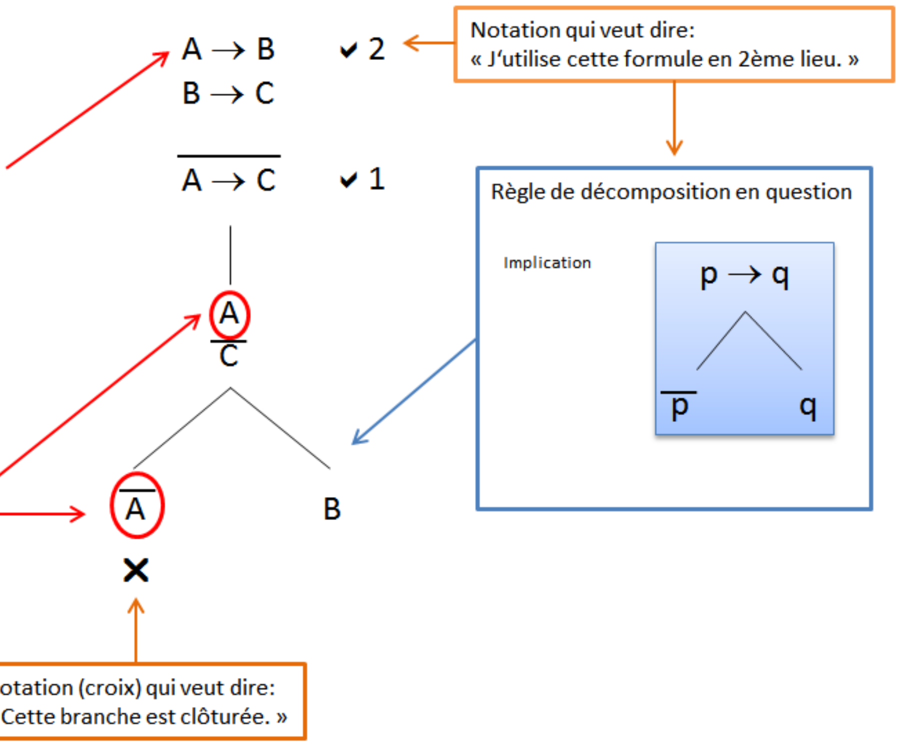
Il reste encore 2 formules à décomposer.

Puisque les 2 formules restantes sont des formes disjonctives, on commence simplement par la première formule.

Comme dans l'étape précédente, on inscrit le résultat de décomposition sur toutes le branches (il y a toujours une seule branche).

Étape 5

Clôturez toutes le branches sur lesquelles apparaissent des **contradictions**. Ici, il y a une contradiction: A et non-A**!**



Étape 6

Il reste encore 1 formule à décomposer.

Comme dans l'étape précédente, on inscrit le résultat de décomposition sur toutes le branches (une branche est clôturée, alors il reste une seule branche).

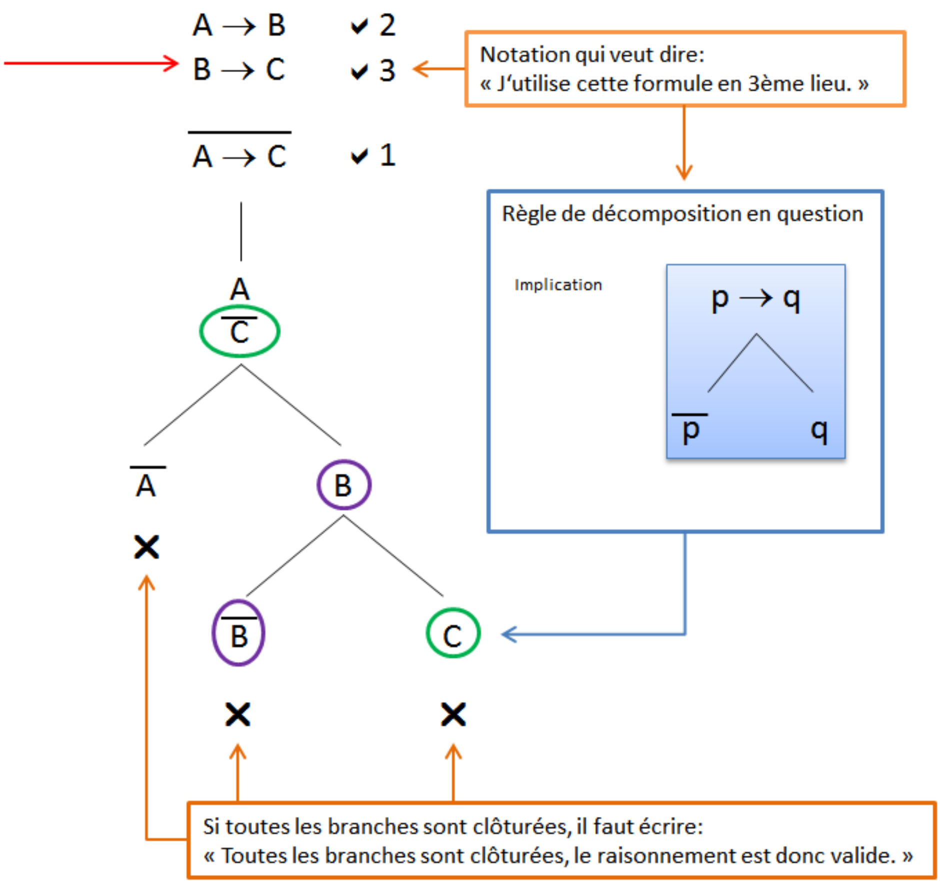
Étape 7

Clôturez toutes les branches sur lesquelles apparaissent des **contradictions**. Ici, il y a deux contradictions:
B et non-B
C et non-C

Étape 8

Si toutes les formules sont décomposées et

- **toutes les branches sont clôturées, le raisonnement est <u>valide</u>!**
- **une ou plusieurs branches restent ouvertes, le raisonnement <u>n'est pas valide</u>!**



5. Exercices :

5.1.

Si Suzanne va à l'école, alors elle s'amuse et elle apprend quelque chose.

Suzanne ne va pas à l'école.

Donc, il n'est pas vrai que Suzanne s'amuse et apprenne quelque chose.

Lexique :	Transcription :
A = Suzanne va à l'école B = Suzanne s'amuse C = Suzanne apprend quelque chose	$A \rightarrow (B \wedge C)$; $\overline{A}$ |-- $\overline{(B \wedge C)}$

Vérifiez le raisonnement par la méthode des arbres :

Conclusion :

Devoir à domicile :

5.2. $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)$; $C \leftrightarrow D$; $\overline{D} \vee E$ |-- $A \rightarrow E$

5.3. $\overline{P} \wedge Q$; $Q \vee R$ |-- $\overline{P \leftrightarrow Q}$

5.4. $\overline{S} \rightarrow \overline{R}$; $\overline{R} \rightarrow (\overline{T} \wedge \overline{P})$ |-- $(T \rightarrow Q) \vee S$