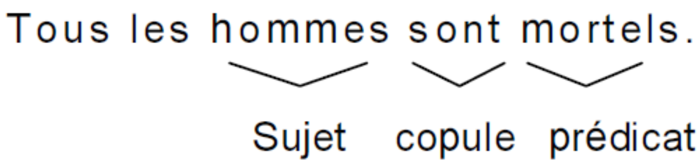
Logique des prédicats

Méthode des arbres & transcriptions

## 1. Définition

La logique des prédicats sert à vérifier la validité des raisonnements où la structure interne des propositions élémentaires doit être analysée en termes de **<u>sujet et prédicat (= attribut, qualité).</u>**




| | |
|---|---|
| Il est impossible de symboliser avec les moyens de la logique des propositions le raisonnement suivant :<br><br>(1) **Tous** les hommes sont mortels.<br>(2) **Socrate** est un homme.<br>(3) Donc Socrate est mortel.<br><br>Lexique :<br>A = Tous les hommes sont mortels<br>B = Socrate est un homme<br>C = Socrate est mortel | Si nous essayons de rendre compte de la structure du raisonnement par les moyens utilisées dans la logique des propositions, nous aurons :<br><br>(1) A<br>(2) B<br>$\vdash$ C<br><br>Ceci n'est pas très convaincant, car rien nous permet de vérifier la validité de ce raisonnement. |

Si nous voulons rendre compte d'un tel raisonnement**, <u>il faut tenir compte de la structure interne des propositions</u>** ! Pour faire cela, il faut d'abord connaître les différents types de propositions.

## 2. Les quatre types de propositions

La structure prédicative permet de distinguer quatre possibilités de propositions. En effet, on peut opérer deux distinctions :

- entre propositions affirmatives et négatives
- entre propositions **<u>universelles</u>** (générales) et **<u>existentielles</u>** (particulières)

Ces deux distinctions nous donnent les quatre types suivants :

a. proposition universelle affirmative: Tous, chaque, la totalité, l'ensemble des …
b. proposition universelle négative: Aucun, nul, personne, il n'existe pas …
c. proposition particulière affirmative: Quelques, certains, il y a, il existe …
d. proposition particulière négative: Quelques/certains/il y a … ne … pas …

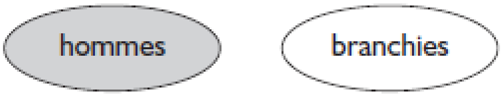
On appelle **<u>proposition singulière</u>** une proposition à sujet concret : Noms propres («Socrate», «César»); termes désignés (par «ce», «ces», «ceci», «cela», «celui-ci», «celui-là»); pronoms personnels («je», «tu» etc.); termes désignant un objet unique («le pape», «l'auteur du Rénert» etc.).

## 3. L’extension du sujet et du prédicat

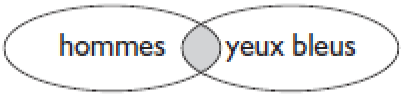
Suivant les quatre types de propositions, les sujets et les prédicats ont des extensions différentes, c'est-à-dire qu’ils s’appliquent à des ensembles plus ou moins grand d’êtres.

- «Tous les hommes sont mortels» signifie que «la **totalité** des hommes représente une **partie** des êtres mortels».

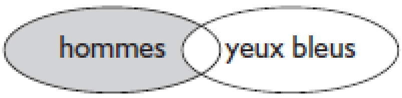

- «Aucun homme n’a de branchies (Kiemen)» signifie que «la **totalité** des hommes ne fait pas partie de la **totalité** des êtres ayant des branchies».




- «Quelques hommes ont les yeux bleus» signifie «Une **partie** des hommes correspond à une **partie** des êtres aux yeux bleus».




- «Quelques hommes n’ont pas les yeux bleus» signifie «Une **partie** des hommes ne fait pas partie de la totalité des êtres aux yeux bleus».




## 4. Symbolisation

Avec la logique des prédicats nous voyons l’introduction de quantificateurs qui nous permettent de faire des affirmations au sujet d’une, de plusieurs ou de tous les individus :

**a) Spécialisation Existentielle ($\exists x$)**

Si on a

($\exists$x) Sx [il existe au moins un individu « x », qui a la propriété « S »]

**b) Spécialisation Universelle ($\forall x$)**

Si on a

($\forall$x) Rx [tout individu « x » a la propriété « R »]

## 5. Exemple

Si on analyse le raisonnement auparavant en respectant la logique des prédicats, nous trouvons alors la structure suivante :

| | |
|---|---|
| Exemple :<br><br>(1) **Tous** les hommes sont mortels.<br>(2) **Socrate** est un homme.<br>(3) Donc Socrate est mortel.<br><br>Structure :<br><br>(1) Tous les A sont B<br>(2) s est A<br>(3) Donc s est B | Lexique :<br><br>Ax = x est un homme<br>Bx = x est mortel<br>s = Socrate<br><br>Transcription :<br><br>(1) $(\forall x)$ [Ax → Bx] (Pour tous les hommes, on a qu'ils sont mortels)<br>(2) As (Socrate est une proposition singulière, qui est un homme)<br>$\vdash$ Bs (Socrate est mortel) |

## 6. Interprétation de $(\forall x)$ et $(\exists x)$ (livre p.79)

Considérons la proposition :

«*Tous sont venus*» = $(\forall x)$ Ax

Ceci signifie aussi :

«*Il n'existe aucun individu qui ne soit pas venu*» = $\overline{(\exists x)\overline{Ax}}$

Nous voyons que les quantificateurs sont interdéfinissables. Nous pouvons dresser le tableau de ces relations:

***Relations entre les quantificateurs:***

| | | |
|---|---|---|
| $(\forall x)$ Ax<br>«chaque x est venu» | ⇔ | $\overline{(\exists x)\overline{Ax}}$<br>«il n'y a pas de x qui ne soit pas venu» |
| $(\forall x)$ $\overline{Ax}$<br>«chaque x n'est pas venu»<br>*<u>aucun x n'est venu</u>* | ⇔ | $\overline{(\exists x)Ax}$<br>«il n'y a pas de x qui soit venu» |
| $\overline{(\forall x)Ax}$<br>« il est faux que tous les x soient venus»<br>*tous les <u>x ne sont pas venus</u>* | ⇔ | $(\exists x)$ $\overline{Ax}$<br>«il y a des x qui ne sont pas venus» |
| $\overline{(\forall x)\overline{Ax}}$<br>«il est faux qu'aucun x ne soit venu» | ⇔ | $(\exists x)$ Ax<br>«il y a au moins un x qui est venu» |

## 7. Remplacer les Quantificateurs

**A) pour remplacer les quantificateurs:**

1. on échange le quantificateur
2. on nie ce qui est lié par le quantificateur;
3. on nie l'expression entière

**B) pour transformer l'expression $(\forall x)\ [Ax \to Bx]$:**

$$(\forall x)\ [Ax \to Bx] \quad \Leftrightarrow \quad \overline{(\exists x)\overline{[Ax \to Bx]}} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{(\exists x)[Ax \wedge \overline{Bx}]}$$

par la règle ci-dessus — par Implication niée

## 8. Conseils (livre p. 107-120)

Pour la symbolisation en logique des prédicats (PTR), on suivra les mêmes principes que pour la transcription en logique des propositions. On veillera en plus à:

- **reprendre dans le lexique:**

- les prédicats (*Eigenschaftsworte*) qui désignent les qualités (ou les propriétés) que les x sont censés posséder,
- un éventuel univers du discours (à savoir un prédicat qui reviendrait dans chacune des prémisses pour tous les x). En ce cas, x n'est plus indéfini, mais est délimité et prend donc une certaine signification qu'autrement il n'aurait pas;

- **identifier correctement les quantificateurs:**

- les propositions singulières (portant sur un individu clairement désigné par son nom) ne sont pas quantifiées,
- certaines prémisses peuvent comporter deux ou plusieurs propositions quantifiées,
- dans certaines locutions la quantification (universelle) n'est pas apparente (p.ex. les roses sont rouges = *toutes* les roses….),
- les universelles s'expriment généralement par des *implications* et les existentielles par des *conjonctions* (des exceptions sont possibles: «tous sont venus (A) **et** sont restés (B) » $(\forall x)\ [Ax \wedge Bx]$);

- **distinguer clairement les conditions nécessaires (CN) et les conditions nécessaires et suffisantes (CNS):**

- en transcrivant «seul» ou «seulement (si)» toujours par une (CN),
- en transcrivant «si et seulement si» toujours par une (CNS);

- **se laisser guider par son intuition et son bon sens:**

- ce qui en français est une universelle peut éventuellement être mieux saisi comme une existentielle ceci peut être très différent d'une personne à une autre,
- la question qu'il faut toujours se poser est: «*quel est le **sens** de la proposition à transcrire et est-ce que ma transcription est conforme à ce sens?*»,
- pour cerner le sens de la proposition, il peut s'avérer utile de la traduire en sa langue maternelle.

## 9. Exercices d'initiation

Déterminez le lexique, la structure et la transcription pour chacun des exercices suivants :

| **7.1. Proposition singulière (p.108)** | |
|---|---|
| *Hume est un empiriste et il est sceptique.* | Lexique : |
| Structure : | Transcription : |

| **7.2. Existentielle (p.108)** | |
|---|---|
| *Certains philosophes sont des rationalistes.* | Lexique : |
| Structure : | Transcription : |

| **7.3. Universelle (p.109)** | |
|---|---|
| *Les jeunes philosophes sont idéalistes.* | Lexique : |
| Structure : | Transcription : |

| 7.4. Universelle et Existentielle (p.109) | |
|---|---|
| *Aucun philosophe n'est ignorant.* | Lexique : |
| Structure : | Transcription 1 : |
| Alternative : | Transcription 2 : |

| 7.5. Expressions traîtresse : Quantification universelle niée (p.110) | |
|---|---|
| *Tous les philosophes ne sont pas ignorants.* | Lexique : |
| Structure : | Transcription 1 : |
| Alternative : | Transcription 2 : |

| 7.5. Double négation (p.110) | |
|---|---|
| *Aucun philosophe n'est inintéressant.* | Lexique : |
| Structure : | Transcription 1 : |
| Alternative : | Transcription 2 : |

| 7.5. Condition Nécessaire (CN) (p.112) | |
|---|---|
| *Seuls les cygnes noirs ne sont pas blancs.* | Lexique : |
| Structure : | Transcription : |

| 7.5. Condition Nécessaire et Suffisante (CNS) (p.117) | |
|---|---|
| *Tous sauf les philosophes sont déraisonnables.* | Lexique : |
| Structure : | Transcription : |

| 7.5. Cas particulier (p.118) | |
|---|---|
| *Les rationalistes et les empiristes sont raisonnables, mais tous ne doutent pas.* | Lexique : |
| Structure : | Transcription : |

**Logique des prédicats : Transcriptions (PTR) - Exercices préliminaires (niveau avancé)**

| | Lexique | Transcription |
|---|---|---|
| 1. Les éléphants sont des mammifères | Ax : x est éléphant<br>Bx : x est mammifère | |
| 2. Certains élèves sont présents. | Ax : x est élève<br>Bx : x est présent | |
| 3. Les loups ne sont pas tous dangereux. | Ax : x est éléphant<br>Bx : x est dangereux | |
| 4. Tout ce qui brille n'est pas en or. | Ax : x brille<br>Bx : x est de l'or | |
| 5. Aucun Visiteur ne reste pour le dîner. | Ax : x est visiteur<br>Bx : x reste pour le dîner | |
| 6. Quelques élèves sont à la fois intelligents et appliqués. | Ax : x est élève<br>Bx : x est intelligent<br>Cx : x est appliqué | |
| 7. Celui qui combat par l'épée périra par l'épée. | Ax : x combat par l'épée<br>Bx : x périt par l'épée | |
| 8. Les bons conseils ne sont pas tous appréciés. | Ax : x est bon<br>Bx : x est conseil<br>Cx : x est apprécié | |
| 9. Heureux l'homme qui connaît ses propres limites. | Ax : x est heureux<br>Bx : x est homme<br>Cx : x connaît ses propres limites | |
| 10. Jean-Claude n'est pas un philosophe. | Ax : x est un philosophe<br>a : Jean-Claude | |
| 11. Tous les citoyens à l'exception des fonctionnaires de l'Etat peuvent être élus. | Ax : x est citoyen<br>Bx : x est fonctionnaire de l'Etat<br>Cx : x est éligible | |
| 12. Personne ne réussira à moins de s'efforcer de tout son cœur. | Ax : x réussit<br>Bx : x s'efforce de tout son cœur | |
| 13. Pas de roses sans épines. | Ax : x est une rose<br>Bx : x a des épines | |

| | | |
|---|---|---|
| 14. Un homme sans cœur n'aura pas de vrais amis. | Ax : x est un homme<br>Bx : x a du cœur<br>Cx : x a de vrais amis | |
| 15. Rien n'est connu si ce n'est que par l'intermédiaire des sens et de la raison. | Ax : x est connu<br>Bx : x passe par les sens<br>Cx : x passe par la raison | |

| | | |
|---|---|---|
| 16. Certains cadres supérieurs sont les seuls à avoir un secrétaire. | Ax : x est cadre supérieur<br>Bx : x a un secrétaire | |
| 17. Les visiteurs ne restent pas tous pour dîner. | Ax : x est visiteur<br>Bx : x reste pour dîner | |
| 18. Aucun manteau n'est imperméable à moins qu'il n'ait été imprégné. | Ax : x est manteau<br>Bx : x est imperméable<br>Cx : x a été imprégné | |
| 19. Seuls les enseignants peuvent utiliser l'ascenseur. | Ax : x est enseignant<br>Bx : x peut utiliser l'ascenseur | |
| 20. Quelques médicaments ne sont dangereux que s'ils sont pris à de fortes doses. | Ax : x est médicament<br>Bx : x est dangereux<br>Cx : x est pris à de fortes doses | |
| 21. Aucune fille n'est gentille à moins qu'elle ne soit bien éduquée. | Ax : x est fille<br>Bx : x est gentil<br>Cx : x est bien éduqué | |
| 22. Ceux qui parlent beaucoup n'ont pas tous beaucoup à dire. | Ax : x parle beaucoup<br>Bx : x a beaucoup à dire | |
| 23. Parmi les soldats, il y a des hommes et des femmes. | Ax : x est soldat<br>Bx : x est homme<br>Cx : x est femme | |
| 24. Il y a des passions qui ne sont pas blâmables. | Ax : x est une passion<br>Bx : x est blâmable | |
| 25. Seuls les membres du club peuvent assister à l'assemblée générale. | Ax : x est membre du club<br>Bx : x peut assister à l'assemblée générale | |
| 26. Tout ce qui est agréable est ou bien immoral ou bien illégal ou bien malsain. | Ax : x est agréable<br>Bx : x est immoral<br>Cx : x est illégal<br>Dx : x est malsain | |

| | | |
|---|---|---|
| 27. Les acteurs qui sont célèbres n'ont pas tous du talent. | Ax : x est acteur<br>Bx : x est célèbre<br>Cx : x a du talent | |
| 28. Aucune voiture qui a plus de dix années de service ne sera réparée si elle est accidentée. | Ax : x est une voiture<br>Bx : x a plus de dix années de service<br>Cx : x est réparé<br>Dx : x est accidenté | |
| 29. Quelques jeunes filles ne sont gentilles que si elles sont bien éduquées. | Ax : x est jeune<br>Bx : x est fille<br>Cx : x est gentil<br>Dx : x est bien éduqué | |
| 30. Quelques jeunes filles sont gentilles si elles sont bien éduquées. | Ax : x est jeune<br>Bx : x est fille<br>Cx : x est gentil<br>Dx : x est bien éduqué | |

| | | |
|---|---|---|
| 31. Pierre qui roule n'amasse pas mousse. | Ax : x est une pierre<br>Bx : x roule<br>Cx : x amasse de la mousse | |
| 32. Parmi les professeurs, il y a des philosophes et des mathématiciens, mais nul n'est paléontologue. | Ax : x est professeur<br>Bx : x est philosophe<br>Cx : x est mathématicien<br>Dx : x est paléontologue | |
| 33. Pour mesurer son ignorance, il faut être instruit. | Ax : x mesure son ignorance<br>Bx : x est instruit | |
| 34. Ce qui se conçoit bien s'énonce clairement. | Ax : x se conçoit bien<br>Bx : x s'énonce clairement | |
| 35. Presque tous les invités sont venus à la réception. | Ax : x est invité<br>Bx : x est venu à la réception | |
| 36. Rien ne s'énonce clairement à moins d'être bien conçu. | Ax : x s'énonce clairement<br>Bx : x est bien conçu | |
| 37. Tous, sauf les lecteurs du Figaro, sont mal informés. | Ax : x est lecteur du Figaro<br>Bx : x est bien informé | |

| | | |
|---|---|---|
| 38. Si les abonnés du Figaro ne lisent pas leur journal ou le comprennent de travers, ils sont mal informés. | Ax : x est abonné du Figaro<br>Bx : x lit son journal<br>Cx : x comprend le journal à travers<br>Dx : x est bien informé | |
| 39. Tous les amateurs ne viendront pas, mais tous les professionnels non plus. | Ax : x est amateur<br>Bx : x vient<br>Cx : x est professionnel | |
| 40. Il est faux de dire que tous les avocats sont des philosophes. | Ax : x est avocat<br>Bx : x est philosophe | |
| 41. Quiconque travaille tard le soir ne se réveille pas tôt le matin. | Ax : x travaille tard le soir<br>Bx : x se réveille tôt le matin | |
| 42. Il n'est pas vrai que les oiseaux sont des mammifères, mais il est vrai que les hirondelles reviennent en printemps. | Ax : x est oiseau<br>Bx : x est mammifère<br>Cx : x est hirondelle<br>Dx : x revient en printemps | |
| 43. Gilbert joue aux quilles si et seulement si Robert joue aussi. | Ax : x joue aux quilles<br>a : Gilbert<br>b : Robert | |
| 44. La plupart des professeurs et aucun élève ne voudra participer à l'Olympiade Mathématique. | Ax : x est professeur<br>Bx : x est élève<br>Cx : x participe à l'Olympiade Mathématique | |
| 45. Si seuls les philosophes sont de bons politiciens et si les seuls à pouvoir gouverner un pays sont des amateurs de la philosophie, alors il est faux qu'il y ait un politicien sans formation philosophique. | Ax : x est philosophe<br>Bx : x est bon<br>Cx : x est politicien<br>Dx : x peut gouverner un pays<br>Ex : x est amateur de la philosophie<br>Fx : x a eu une formation philosophique | |

### Exercices livre p. 121

| | |
|---|---|
| • PTR 6<br>• PTR 8<br>• PTR 10<br>• PTR 20 | • PTR 26<br>• PTR 29<br>• PTR 34 |

## Logique des propositions: la méthode des arbres (MA)

### 1. <u>Définition</u>

La méthode des arbres (MA) est une méthode pour vérifier si un raisonnement logique est valide ou non.

### 2. <u>Principe</u>

Normalement, afin de vérifier un raisonnement logique, il faut établir une « table de vérité », qui donne la valeur de vérité des propositions complexes à partir des valeurs de vérité des propositions élémentaires qui la composent.

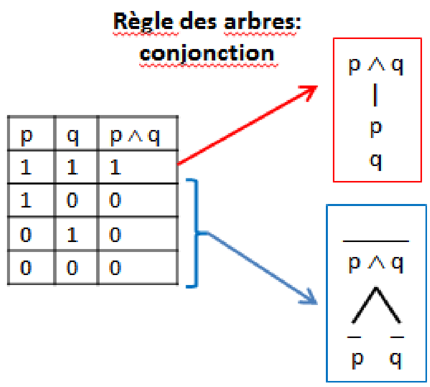
- Par exemple :

« Le soleil brille et il fait chaud. »

Quand est-ce qu'on peut dire que cette proposition complexe est vraie dans son ensemble ?

- Table de vérité :

| p = le soleil brille | q = il fait chaud | $p \wedge q$ = le soleil brille et il fait chaud |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |




On peut donc constater que cette proposition complexe est vraie si et seulement si ses propositions élémentaires (p et q) sont vraies aussi.

- **Problème :**

Or, pour des propositions encore plus complexes qui sont composées d'une multitude de propositions élémentaires le nombre de lignes dans notre tableau de vérité augmente d'une façon exponentielle. Ceci n'est guère efficace.

- **Solution :**

On utilise la méthode des arbres! Cette méthode consiste en l'admission par hypothèse que le raisonnement n'est pas valide et que la conclusion est donc fausse.

Dans cette situation, deux cas sont donc possibles :

a) L'hypothèse de la fausseté de la conclusion mène dans tous les cas à des contradictions. → Ceci signifie donc qu'il faut admettre le contraire de notre hypothèse (que la conclusion est vraie).

b) L'hypothèse ne produit pas toujours des contradictions. → Ceci signifie donc que notre hypothèse doit être vraie (que la conclusion et le raisonnement sont faux).

**c) <u>Méthode des arbres : les règles de décomposition</u>**

| | Règle | Table de vérité | | | Explication |
|---|---|---|---|---|---|
| Formes conjonctives | Conjonction<br>$p \wedge q$<br>$p$<br>$q$ | p | q | $p \wedge q$ | Si une conjonction est vraie, alors p et q sont vrais. |
| | | 1 | 1 | 1 | |
| | | 1 | 0 | 0 | |
| | | 0 | 1 | 0 | |
| | | 0 | 0 | 0 | |
| | Disjonction niée<br>$\overline{p \vee q}$<br>$\overline{p}$<br>$\overline{q}$ | p | q | $\overline{p \vee q}$ | Si une disjonction est fausse, alors p et q sont faux. |
| | | 1 | 1 | 0 | |
| | | 1 | 0 | 0 | |
| | | 0 | 1 | 0 | |
| | | 0 | 0 | 1 | |
| | Implication niée<br>$\overline{p \rightarrow q}$<br>$p$<br>$\overline{q}$ | p | q | $\overline{p \rightarrow q}$ | Si une implication est fausse, alors p est vrai et q est faux. |
| | | 1 | 1 | 0 | |
| | | 1 | 0 | 1 | |
| | | 0 | 1 | 0 | |
| | | 0 | 0 | 0 | |
| Formes disjonctives | Implication<br>$p \rightarrow q$<br>$\overline{p}$   $q$ | p | q | $p \rightarrow q$ | Si une implication est vraie, alors ou bien p est faux ou bien q est vrai. |
| | | 1 | 1 | 1 | |
| | | 1 | 0 | 0 | |
| | | 0 | 1 | 1 | |
| | | 0 | 0 | 1 | |
| | Disjonction<br>$p \vee q$<br>$p$   $q$ | p | q | $p \vee q$ | Si une disjonction est vraie, alors p ou q est vrai. |
| | | 1 | 1 | 1 | |
| | | 1 | 0 | 1 | |
| | | 0 | 1 | 1 | |
| | | 0 | 0 | 0 | |
| | Conjonction niée<br>$\overline{p \wedge q}$<br>$\overline{p}$   $\overline{q}$ | p | q | $\overline{p \wedge q}$ | Si une conjonction est fausse, alors ou bien q est faux ou bien p est faux. |
| | | 1 | 1 | 0 | |
| | | 1 | 0 | 1 | |
| | | 0 | 1 | 1 | |
| | | 0 | 0 | 1 | |
| | Equivalence<br>$p \leftrightarrow q$<br>$\overline{p}$   $p$<br>$\overline{q}$   $q$ | p | q | $p \leftrightarrow q$ | Si une équivalence est vraie, alors ou bien p et q sont vrais ou bien p et q sont faux. |
| | | 1 | 1 | 1 | |
| | | 1 | 0 | 0 | |
| | | 0 | 1 | 0 | |
| | | 0 | 0 | 1 | |
| | Equivalence niée<br>$\overline{p \leftrightarrow q}$<br>$p$   $\overline{p}$<br>$\overline{q}$   $q$ | p | q | $\overline{p \leftrightarrow q}$ | Si une équivalence est fausse, alors ou bien p est vrai et q est faux ou bien p est faux et q est vrai. |
| | | 1 | 1 | 0 | |
| | | 1 | 0 | 1 | |
| | | 0 | 1 | 1 | |
| | | 0 | 0 | 0 | |

**d) De la symbolisation à la méthode des arbres**

Supposons le raisonnement suivant :

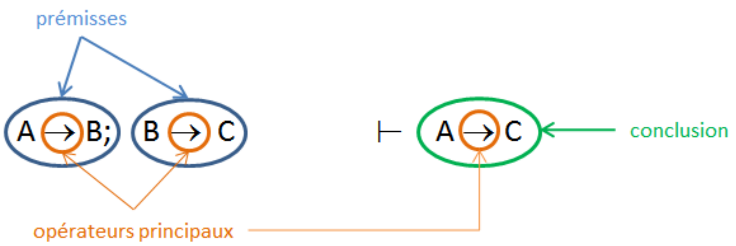
Si Suzanne part en vacances, alors elle s'amuse.

Si Suzanne s'amuse, elle est contente.

Donc, si Suzanne part en vacances, elle est contente.

| Lexique : | Transcription : |
|---|---|
| A = Suzanne part en vacances | 1. $A \to B$ |
| B = Suzanne s'amuse | 2. $B \to C$ |
| C = Suzanne est contente | \|-- $A \to C$ |

Vérifions donc par la méthode des arbres, si le raisonnement est valide ou non:




Étape 1

Copiez les prémisses l'une en dessous de l'autre, de façon à ce que les opérateurs principaux soient centrés verticalement.

$$A \to B$$
$$B \to C$$
$$\overline{A \to C}$$

Étape 2

Ajoutez la conclusion **niée**.

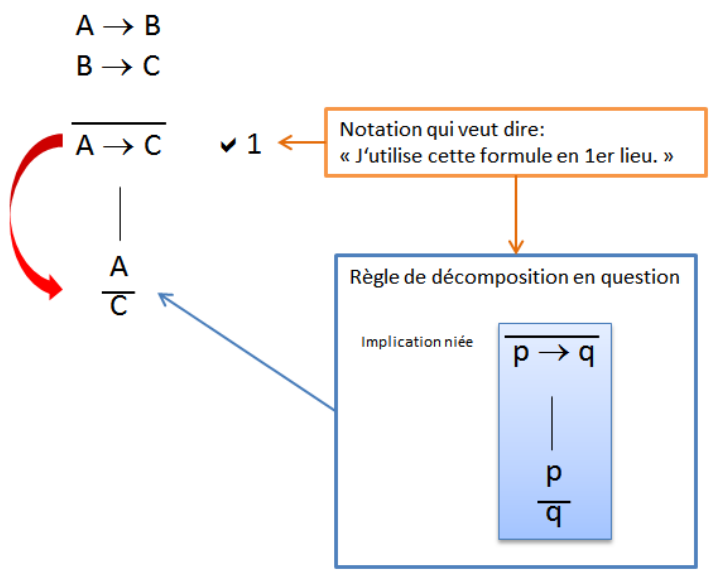
Étape 3

**Décomposez** successivement les formules conformément aux règles de décomposition (cf. feuille).

Inscrivez le résultat de la décomposition sur toutes les branches ouvertes sur lesquelles figure la formule à décomposer (ici, il y a seulement une branche).

Pour éviter d'avoir trop d'embranchements il faut d'abord **privilégier les règles de forme conjonctive** (conjonction, disjonction niée et implication niée).

Ici, on commence donc par la 3ème formule.



Étape 4

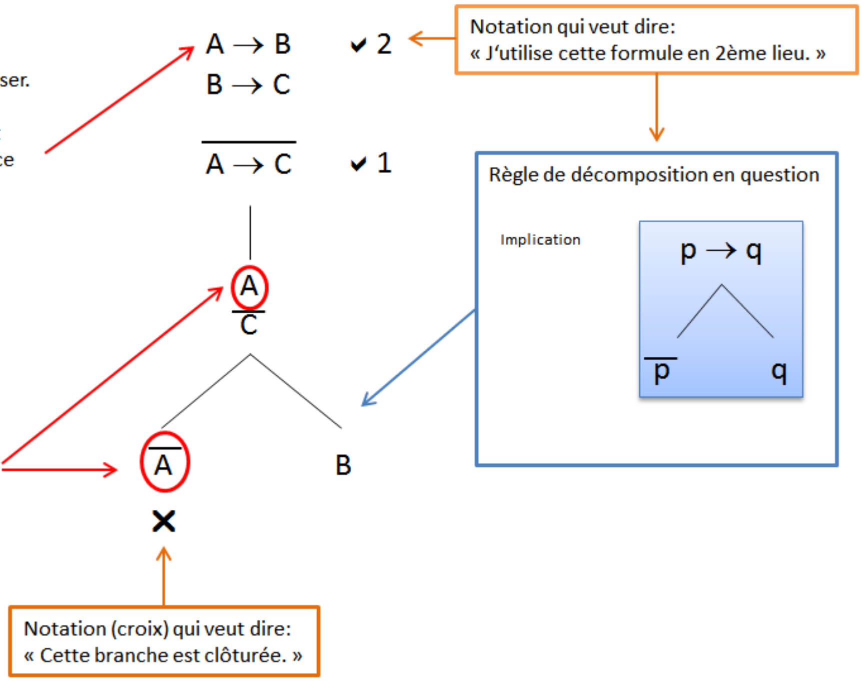
Il reste encore 2 formules à décomposer.

Puisque les 2 formules restantes sont des formes disjonctives, on commence simplement par la première formule.

Comme dans l'étape précédente, on inscrit le résultat de décomposition sur toutes le branches (il y a toujours une seule branche).

Étape 5

**Clôturez** toutes le branches sur lesquelles apparaissent des **contradictions**. Ici, il y a une contradiction: A et non-A**!**




Étape 6

Il reste encore 1 formule à décomposer.

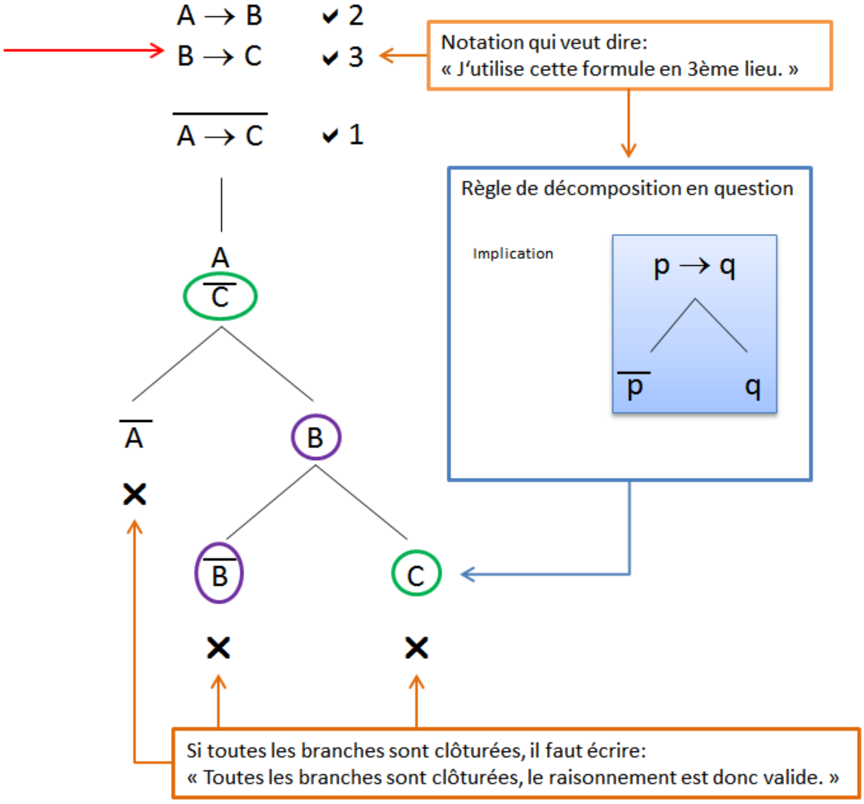
Comme dans l'étape précédente, on inscrit le résultat de décomposition sur toutes le branches (une branche est clôturée, alors il reste une seule branche).

Étape 7

**Clôturez** toutes les branches sur lesquelles apparaissent des **contradictions**. Ici, il y a deux contradictions:

**B et non-B**

**C et non-C**




Étape 8

Si toutes les formules sont décomposées et

- **toutes les branches sont clôturées, le raisonnement est <u>valide</u>!**
- **une ou plusieurs branches restent ouvertes, le raisonnement <u>n'est pas valide</u>!**

## e) Exercice :

Si Suzanne va à l'école, alors elle s'amuse et elle apprend quelque chose.

Suzanne ne va pas à l'école.

Donc, il n'est pas vrai que Suzanne s'amuse et apprenne quelque chose.

| Lexique : | Transcription : |
|---|---|
| A = Suzanne va à l'école<br>B = Suzanne s'amuse<br>C = Suzanne apprend quelque chose | $A \rightarrow (B \wedge C)$ ; $\overline{A}$ \|-- $\overline{(B \wedge C)}$ |

Vérifiez le raisonnement par la méthode des arbres :

Conclusion :

Devoir à domicile :

5.1. $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)$ ; $C \leftrightarrow D$ ; $\overline{D} \vee E$ |-- $A \rightarrow E$

5.2. $\overline{P} \wedge Q$ ; $Q \vee R$ |-- $\overline{P \leftrightarrow Q}$

5.3. $\overline{S} \rightarrow \overline{R}$ ; $\overline{R} \rightarrow (\overline{T} \wedge \overline{P})$ |-- $(T \rightarrow Q) \vee S$

## 1. Définition

La méthode des arbres dans la logique des prédicats est une méthode pour vérifier des raisonnements logiques qui portent sur des quantificateurs.

## 2. Principe

Avec la logique des prédicats nous avons vu l'introduction de quantificateurs qui nous permettent de faire des affirmations au sujet d'une, de plusieurs ou de tous les individus. Ainsi, pour tester la validité d'un raisonnement en logique des prédicats, il faut introduire deux règles nouvelles :

### c) Spécialisation Existentielle

Si on a

(∃x) Sx [il existe au moins un individu « x », qui a la propriété « S »]

alors on peut déduire qu'il y a au moins une spécialisation possible (a ou b ou c ou…). On est donc autorisé à faire une seule spécialisation. Nous avons donc :

(∃x) Sx ➔ Sa

La spécialisation est seulement possible pour des individus n'ayant pas encore été utilisés dans le contexte du raisonnement à vérifier.

Si on a donc une deuxième existentielle

(∃x) Px [il existe au moins un individu « x », qui a la propriété «P»]

il faut la spécialiser de la manière suivante :

(∃x) Px ➔ Pb

### d) Spécialisation Universelle

Si on a

(∀x) Rx [tout individu « x » a la propriété « R »]

alors on peut en déduire que tout individu quelconque a, b, c, etc… a nécessairement la propriété « R ». Nous avons donc :

(∀x) Rx ➔ Ra

Puisque nous avons encore une deuxième existentielle, il faut y ajouter :

(∀x) Rx ➔ Ra

Rb

## 3. De la transcription des prédicats à la logique des arbres

La méthode des arbres dans la logique des prédicats se fait en trois étapes :

### a) La transformation

1. Copier les prémisses les unes à la suite des autres.
2. Ajouter la conclusion sous forme niée.
3. Si une formule contient plusieurs quantificateurs, il faut la décomposer selon les règles de décomposition (les existentielles avant les universelles). Par exemple :

$$(\forall x)\ Ax \rightarrow (\exists x)\ Bx$$

$$\overline{(\forall x)\ Ax} \qquad (\exists x)\ Bx$$

4. Transformer les quantificateurs niés en quantificateurs non-niés conformément à la règle de transformation suivante :

$$\overline{(\forall x)Ax} \leftrightarrow (\exists x)\overline{Ax}$$
$$\overline{(\exists x)Ax} \leftrightarrow (\forall x)\overline{Ax}$$
$$\overline{(\forall x)\overline{Ax}} \leftrightarrow (\exists x)Ax$$
$$\overline{(\exists x)\overline{Ax}} \leftrightarrow (\forall x)Ax$$

5. Déterminer le nombre d'existentielles.

### b) La modélisation

6. Spécifier toutes les existentielles en introduisant dans chaque existentielle une constante différente (a, b, c, etc…). Par exemple :

$(\exists x)\ Ax \leftrightarrow Bx \quad \rightarrow \quad Aa \leftrightarrow Ba$

$(\exists x)\ Cx \vee Dx \quad \rightarrow \quad Cb \vee Db$

7. Introduire toutes les constantes spécifiées (a, b, c, etc…) dans chaque universelle. Par exemple :

$(\forall x)\ Rx \wedge Qx \quad \rightarrow \quad Ra \wedge Qa$

$Rb \wedge Qb$

### c) La vérification

8. Résoudre l'exercice en utilisant les règles de décomposition de la méthode des arbres.

# 4. Exemples

## 4.1.

prémisses

$(\exists x)\, Px;\ (\forall x)\, [Px \rightarrow Qx] \ \vdash\ (\exists x)\, Qx$ ← conclusion

2 Existentielles et 1 Universelle

### Arbre de vérification

Étape 1

Copiez les **prémisses** l'une en dessous de l'autre.

$\boxed{(\exists x)\, Px}$ ✔ 2

$(\forall x)\, [Px \rightarrow Qx]$ ✔ 4

$\overline{(\exists x)\, Qx}$ ✔ 1

Étape 2

Ajoutez la **conclusion** **niée**.

### Transformation

Étape 3

Si une formule contient **plusieurs quantificateurs**, il faut la **décomposer.** Ici, aucune formule ne contient plusieurs quantificateurs.

Étape 4

Transformer les quantificateurs niés en **quantificateurs non-niés**.

$(\forall x)\, \overline{Qx}$ ✔ 3

### Modélisation

Étape 5

Déterminer le **nombre d'existentielles**. Ici il y a seulement une existentielle.

$\boxed{Pa}$

$\overline{Qa}$

$Pa \rightarrow Qa$ ✔ 5

Étape 6 + 7

On introduit les **constantes spécifiées** dans **chaque universelle**. Ici on a qu'une seule constante.

### Vérification

Étape 8

Nous terminons la vérification en utilisant des **règles de décomposition**.

| | |
|---|---|
| $\overline{Pa}$ | $Qa$ |
| X | X |

Toutes les branches sont clôturées, le raisonnement est donc valide.

## 4.2.

$$(\forall x)\,[Ax \rightarrow Bx]\;;\;(\forall x)\,[\overline{Ax} \rightarrow \overline{Cx}]\;;\;(\exists x)\,[Ax \wedge Ex] \wedge (\forall x)\,[\overline{Cx} \rightarrow \overline{Ex}]\;;\;(\exists x)\,[Cx \wedge \overline{Bx}] \vdash (\exists x)\,[Bx \rightarrow Ax]$$

### Arbre de vérification

**Étape 1**

Copiez les **prémisses** l'une en dessous de l'autre.

**Étape 2**

Ajoutez la **conclusion** **niée**.

$(\forall x)\,[Ax \rightarrow Bx]$ ✓ 5

$(\forall x)\,[\overline{Ax} \rightarrow \overline{Cx}]$ ✓ 6

$(\exists x)\,[Ax \wedge Ex] \wedge (\forall x)\,[\overline{Cx} \rightarrow \overline{Ex}]$ ✓ 2

$\boxed{(\exists x)}\,[Cx \wedge \overline{Bx}]$ ✓ 3

$\overline{(\exists x)\,[Bx \rightarrow Ax]}$ ✓ 1

### Transformation

**Étape 3 + 4**

Transformer les quantificateurs niés en **quantificateurs non-niés** et **décomposer** les formules qui contiennent **plusieurs quantificateurs**.

$(\forall x)\,\overline{Bx \rightarrow Ax}$ ✓ 7

$\boxed{(\exists x)}\,[Ax \wedge Ex]$ ✓ 4

$(\forall x)\,[\overline{Cx} \rightarrow \overline{Ex}]$ ✓ 8

### Modélisation

**Étape 5**

Déterminer le **nombre d'existentielles.**
Ici il y a 2 **existentielles**.

**Étape 6**

On introduit les **constantes spécifiées** dans **chaque universelle (a et b).**

**Étape 7**

Introduire toutes les constantes spécifiées (a et b) dans **chaque universelle**.

$Ca \wedge \overline{Ba}$ ✓ 9

$Ab \wedge Eb$

$Aa \rightarrow Ba$ ✓ 10

$Ab \rightarrow Bb$

$\overline{Aa} \rightarrow \overline{Ca}$ ✓ 11

$\overline{Ab} \rightarrow \overline{Cb}$

$\overline{Ba \rightarrow Aa}$

$\overline{Bb \rightarrow Ab}$

$\overline{Ca} \rightarrow \overline{Ea}$

$\overline{Cb} \rightarrow \overline{Eb}$

### Vérification

**Étape 8**

Nous terminons la vérification en utilisant des **règles de décomposition.**

$Ca$
$\overline{Ba}$

$\overline{Aa}$ | $Ba$ X

$Aa$ X | $\overline{Ca}$ X

Nous vérifions les expressions du modèle individu par individu.
**Conseil:** ce n'est pas forcément avec l'individu **«a» que l'on ferme plus vite!**

Toutes les branches sont clôturées, le raisonnement est donc valide.

***PMA 2*** $(\forall x)\,[Cx \rightarrow (Sx \vee Tx)];\ (\forall x)\,[Sx \rightarrow Nx];\ \overline{(\forall x)[Cx \rightarrow Nx]}$

1988 (2) $\vdash\ (\exists x)\,[Cx \wedge Tx]$

valide

***PMA 19*** $(\forall x)\,[\overline{Ax} \vee (Bx \vee Cx)];\ (\exists x)\,[Ax \wedge Bx];\ \overline{(\forall x)[Ax \rightarrow Bx]}$

1996 (1) $\vdash\ (\exists x)\,[Ax \wedge Cx]$

valide, ∃ multiples

***PMA 23*** $(\exists x)\,[Ax];\ (\exists x)\,[Ax] \rightarrow \overline{(\exists x) Bx}\ ;\ (\forall x)\,[\overline{Bx} \rightarrow (Cx \rightarrow Dx)]$

1997 (2) $\vdash\ (\forall x)\,[Cx \rightarrow Dx]$

valide, ∃ multiples

***PMA 29*** $(\forall x)\,[Ax \rightarrow \overline{Cx}\,] \wedge (\exists x)\,[\,Cx \wedge Dx];\ (\forall x)\,[Dx \leftrightarrow Ax];\ (\exists x)\,Ax$

2000 (2) $\vdash\ (\exists x)\ \overline{Cx} \vee (\exists x)\ \overline{Dx}$

valide, ∃ multiples

Exercices livre page 150 :

| | |
|---|---|
| • PMA 1 | • PMA 10 |
| • PMA 6 | • PMA 14 |
| • PMA 8 | • PMA 17 |
| • PMA 9 | • PMA 29 |