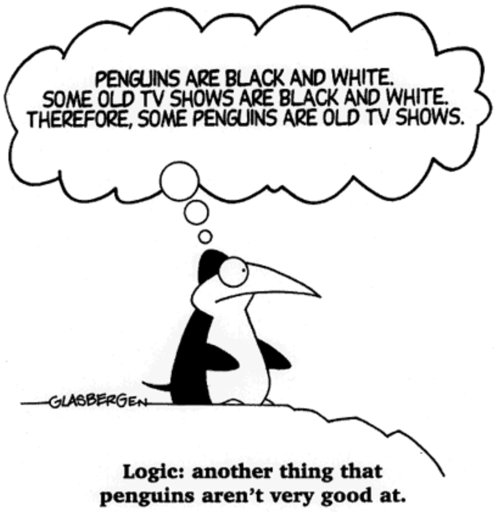


$\vee \ \wedge \ \rightarrow \ \leftrightarrow$

Logique formelle

Programme de 1ère

Collegium Logicum

Matériel complémentaire

Logique des Propositions

Transcriptions

Méthode des arbres

Logique des Prédicats

Transcriptions

Méthode des arbres

Déductions

Preuve Simple

Preuve Conditionnelle

Réduction à l’absurde

1. Définition

La logique est la science qui enseigne à raisonner juste. Il s'agit d'une science formelle dépourvue de contenu, qui a pour objectif de mettre à jour les opérations de la pensée et d'établir les règles auxquelles elles doivent obéir. Autrement dit, c'est l'étude des méthodes et des principes utilisés pour distinguer le raisonnement correct de l'incorrect.

L'étymologie montre que le concept de logique dérive du terme grec logikós (de logos, « raison »). Aristote est considéré le père de la logique formelle, dont les principes sont encore valables à ce jour. Dans son œuvre ***Organon*** (« outil » en grec ancien) Aristote y expose de manière systématique les formes de la pensée. La logique est donc un outil qui nous permet de démontrer la validité d'un raisonnement. Un outil qui est depuis plus de deux millénaires au service de la pensée et de sa clarification.

1.1. Le langage

Notre langage et nos expressions linguistiques nous permettent d'exprimer nos pensées et nos raisonnements. Le langage est donc basé sur des structures logiques. Ainsi nous pouvons distinguer :

- Les expressions vide de sens : oeroe gleu meuf leu
- Les énoncés (dt. Aussage) impératifs : Sois belle et tais-toi !
- Les énoncés interrogatifs : Fera-t-il beau ?
- Les énoncés qui décrivent **un état de choses** : Le ciel est gris.

  ↳ Ce type d'énoncé possède une caractéristique que ne possèdent pas les énoncés précédents : il peut être vrai ou faux ! On appellera un tel énoncé une **proposition**.

1.2. Le raisonnement

La logique consiste à vérifier si une conclusion est bien reliée aux prémisses. Raisonner c'est donc tirer une Proposition nouvelle d'une ou de plusieurs propositions déjà admises.

Exemple :

(1) Tous les hommes sont mortels. (2) Socrate est un homme.	Prémisses Ce qui est envoyé vers l'avant (=vorausgeschickt)
(3) **Donc** Socrate est mortel.	Conclusion Ce qui peut être déduit des prémisses

1.3. Valide et vrai

La logique est une science formelle dépourvue de contenu. Le travail du logicien consiste à s'intéresser à l'aspect formel du raisonnement. Il n'est pas de son ressort de déterminer si les prémisses sont vraies ou non. Il faut donc distinguer si un raisonnement est valide ou s'il est vrai :

Valide	Vrai
Un raisonnement est **valide**, si la déduction est faite correctement, si donc la conclusion peut être tirée des prémisses données. **Exemple :** (1) Tous les hommes sont immortels. (2) Socrate est un homme. (3) Donc Socrate est immortel. Le raisonnement est valide, mais les prémisses sont fausses. La *forme* est valide, mais le *contenu* est faux.	Un raisonnement est **vrai**, si *à la fois* la déduction est valide *et* que le prémisses sont effectivement vraies. **Exemple :** (1) Tous les hommes sont mortels. (2) Socrate est un homme. (3) Donc Socrate est mortel. Le raisonnement est valide *et* les prémisses sont vraies. La *forme* est valide et le *contenu* est vrai.

1.4. Exercice :

Formulez d'autres exemples pour un raisonnement valide et un raisonnement vrai :

Valide	Vrai
____ ____ ____ ____ ____ ____	____ ____ ____ ____ ____ ____

2. Les paralogismes

D’une manière générale on appellera «paralogisme» un raisonnement qui est non-valide. Plusieurs cas sont alors envisageables:

- la fausseté résulte d’une déduction faite selon des règles non acceptées;
- la fausseté résulte d’éléments non explicitement contenues dans les prémisses;
- la fausseté résulte d’une déduction faite à partir d’un changement du sens
- des prémisses en cours de déduction.

Dans une société où être persuasif est d’une importance capitale (pensons à la place de la publicité dans l’économie d’aujourd’hui), les paralogismes seront fréquents, au point qu’il est permis de se demander s’ils ne sont pas autant de sophismes…

Quelques exemples :

- **L'appel à l'autorité**

On commet le paralogisme de «*l'appel à l'autorité*», lorsqu'on raisonne de la façon suivante:

⇨ Le p**résident** affirme que cette information est vraie. Donc, cette information est vraie.

- **L'appel à l'accord général**

Dans certains cas, l'expert est remplacé par un groupe d'experts, par un groupe de personnes ou même par l'humanité en général. Dans ce cas, l'appel à l'autorité se transforme dans «*l'appel à l'accord général*».

- **L' argumentum ad hominem**

L'«*argumentum ad hominem*» (contre la personne) a la même prémisse que l'appel à l'autorité, mais de cette prémisse, il entend tirer la fausseté de la proposition avancée:

⇨ **A** a intérêt à ce que **p** soit accepté comme vrai. Donc **p** est faux.

- **Le paralogisme de l'accident**

On commet le paralogisme de «*l'accident*» en appliquant une règle générale à un cas particulier dont les circonstances accidentelles rendent la règle inapplicable.

⇨ Tous ceux qui frappent délibérément une autre personne devraient être sévèrement punis. Ce champion de boxe devrait se trouver en prison.

- **Les paralogismes de la cause et de la corrélation**

Il y a différentes manières de s'abuser ou d'abuser les autres en raisonnant à l'aide de la relation causale.

⇨ Il a été constaté que les célibataires consommaient plus de sucreries que les gens mariés. Donc, si je me marie je consomme moins de sucreries.

- **La question complexe**

Certaines questions semblent appeler une réponse simple, alors qu'en fait ce sont des questions complexes exigeant une réponse complexe.

Continuez-vous à battre votre femme?

(Oui) / (Non)

Donc vous avez battu votre femme!

3. Notation et transcription

Ne s'intéressant pas au contenu des propositions, mais à leur structure, la logique a intérêt à symboliser les propositions utilisées. Sans symbolisation, il devient très difficile de relever et de dégager les structures des propositions ou de les relier entre elles dans des raisonnements. Il n'y a qu'à considérer l'exemple des mathématiques : « 25 : 2 » est plus facile à manier que « vingt-cinq divisé par deux ».

Nous appellerons ***transcription*** le fait de traduire une proposition d'un langage naturel dans un langage symbolique.

- **Exemples :**

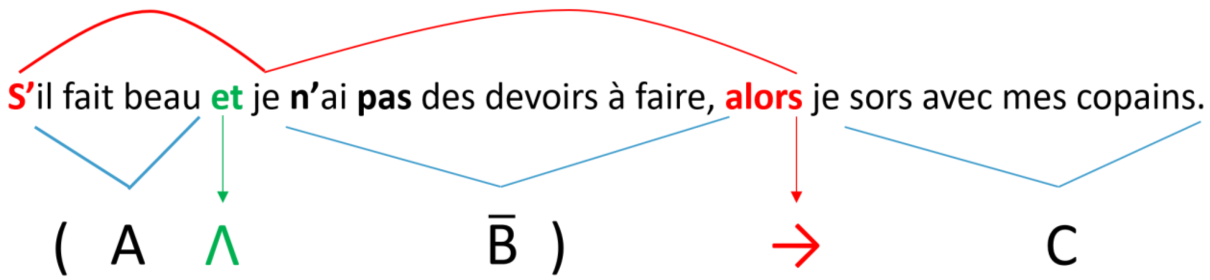
« Le ciel est gris » est une proposition élémentaire qu'on symbolise par A, B, C, etc…

« Le ciel n'est pas gris » est la négation d'une proposition élémentaire qui modifie la valeur de vérité de la proposition. La négation est symbolisée par « ¯ » et se note « $\bar{A}$ » (non-A).

Les propositions complexes sont composées de plusieurs propositions élémentaires qui sont liées par un **opérateur logique :**

Langage naturel	Opérateur logique	Symbole	Transcription
Le ciel est gris **et** il pleut.	Conjonction	$\wedge$	$A \wedge B$
Le ciel est gris **ou** il fait beau.	Disjonction	$\vee$	$A \vee B$
S'il fait beau, **alors** je sors avec mes copains.	Implication	$\rightarrow$	$A \rightarrow B$
Etre de mauvaise humeur **est équivalent à** être grincheux.	Équivalence	$\leftrightarrow$	$A \leftrightarrow B$
…, **donc** je suis heureux	Conclusion	$\vdash$	$\vdash A$

- **Exemple complexe :**



S'il fait beau et je n'ai pas des devoirs à faire, alors je sors avec mes copains.

<u>Lexique :</u>

A = Il fait beau
B = J'ai des devoirs à faire
C = Je sors avec mes copains

<u>Transcription :</u>

3.1. Exercice

- Établissez le lexique et la transcription du texte suivant :

Der Philosoph der tritt herein *und beweist Euch es müsst so sein :*	
Das Erst' wär so, das Zweite so, *Und drum das Dritt' und Vierte so,*	(1) Prémisse
Und wenn das Erst' und Zweit' nicht wär',	(2) Prémisse
Das Dritt' und Viert' wär' nimmermehr.	(3) Conclusion
- Goethe: Faust	

Lexique :

A = ________________________________

B = ________________________________

C = ________________________________

D = ________________________________

Transcription :

(1)

(2)

(3)

- Déterminez si le raisonnement est valide :

La transcription correspond au schéma suivant :	Etablissons un nouveau lexique afin de mieux discerner le raisonnement : ________________________________ ________________________________ ________________________________ ________________________________ ________________________________ ________________________________ ________________________________ ________________________________ ________________________________
Solution :	

4. Exercices préliminaires

Proposition	Symbolisation
1) Le gâteau est bon.	
2) Il ne va pas aller en vacances.	
3) Les élèves sont intelligents et gentils.	
4) Si tu manges trop de chocolat, alors tu auras mal au ventre.	
5) Uniquement si les prix sont bas, ils attirent les clients.	
6) Au cas où il pleut, alors on ne va pas aller à la plage.	
7) Si Julie va au cinéma et n'est pas à l'école, alors elle est en vacances.	

- **Exercice TR 2 (p.103)**

Lexique :

(1) Si les élèves étudient les mathématiques et l'économie politique, alors ils étudient la philosophie ou le français.

(2) Or, il n'est pas vrai que s'ils étudient la philosophie, ils n'étudient pas l'économie politique.

$\vdash$ Donc, ils étudient les mathématiques ou le français.

Lexique de symbolisation

La négation : $\overline{p}$ il est faux que ***p*** non ***p*** ***p*** ne…pas il n'est pas vrai que ***p***	**La conjonction : p Λ q** ***p*** et ***q*** ***p*** alors que ***q*** ***p*** bien que ***q*** ***p*** en plus de ***q*** ***p*** mais (aussi) ***q*** non seulement ***p*** mais aussi ***q*** ***p*** quoique ***q***	**La disjonction : p V q** ***p*** ou ***q*** ***p*** à moins que (ne) ***q***[1] ou bien ***p*** ou bien ***q*** ***p*** sauf ***q***
L'implication : p → q **Condition suffisante (CS)** ***p*** implique ***q*** ***p*** entraîne ***q*** ***p*** est la condition suffisante de ***q*** si ***p*** alors ***q*** ***q***, si ***p*** au cas où ***p***, alors ***q*** il suffit que ***p***, pour que ***q*** ***p*** à condition que ***q*** ***q*** pourvues que ***p***	**L'implication : q → p** **Condition nécessaire (CN)** ***p*** est la condition nécessaire de ***q*** ***q*** seulement si ***p*** ne que ***q*** si ***p*** sans ***p*** pas de ***q*** pour que ***q***, il faut que ***p*** ***q*** à la seule condition que ***p*** uniquement si ***p***, alors ***q***	**L'équivalence : p ↔ q** ***p*** est la condition nécessaire et suffisante de ***q*** ***p*** est la condition nécessaire et suffisante de ***p*** ***p*** si et seulement si ***q*** ***p*** est équivalent à ***q*** il faut et il suffit que ***p*** pour que ***q***

[1] Pour plus d'explications voir livre p. 64.

- **Condition suffisante (CS)**

« Il suffit que **p** soit, pour que **q** soit » ne signifie pas que **p** doit nécessairement être vrai, **q** peut aussi être vrai (pour d'autres raisons) alors que **p** est faux.

La condition suffisante est toujours transcrite par ***l'antécédent*** de l'implication.

Exemple :

S'il fait beau, alors je vais au bois.

Lexique :
A = Il fait beau
B = Je vais au bois

Transcription :
A → B
CS

A → B
B, si A
si A, alors B
B pourvu que A
A implique B
A entraîne B
A est la condition suffisante de B
au cas où A, alors B
il suffit de A pour B
A à condition que B

- **Condition nécessaire (CN)**

Dire que ***p*** est une condition nécessaire pour ***q*** signifie que pour que ***q*** soit réalisée, il faut que ***p*** le soit aussi. « **Seulement** s'il fait beau, alors j'irai au bois » est beaucoup plus fort que « s'il fait beau, je vais au bois ». Le mot « seulement » exclut toute autre possibilité. On peut aussi dire « si je vais au bois, c'est qu'il fait beau ».

La condition nécessaire est toujours transcrite par le ***conséquent*** de l'implication et ***l'antécédent*** se trouve toujours ***après*** l'implication.

Exemple :

Seulement s'il fait beau, alors je vais au bois.

Lexique :
A = Il fait beau
B = Je vais au bois

Transcription :
B → A
CN

B → A
B seulement si A
pour B, il faut A
A est la condition nécessaire de B
ne que B si A
sans A pas de B
seul A, B

- **Condition nécessaire et suffisante (CNS)**

La CNS se reconnaît au fait qu'on peut la décomposer en deux implication inverses. « *Un nombre est divisible par deux, si et seulement s'il est pair* » signifie aussi bien « si un nombre est divisible par deux, alors il est pair » que « si un nombre est pair, alors il est divisible par deux ». « Être pair » et « être divisible par deux » sont synonymes et interchangeables.

Lexique :
A = Être divisible par deux
B = Être pair

Transcription :
A ↔ B (CNS)

Exercice 1 – Transcrivez le raisonnement suivant

Si Antoine travaille beaucoup, il pourra acheter une voiture, et si Julie étudie beaucoup, elle aura son diplôme. Donc, si Antoine travaille beaucoup, Julie aura son diplôme, ou si Julie étudie beaucoup, Antoine pourra acheter une voiture.

Lexique :	Transcription :
A = Antoine travaille beaucoup B = Antoine achète une voiture C = Julie étudie beaucoup D = Julie a son diplôme	

Exercice 2 - Etablissez un lexique pour les propositions suivantes, puis transcrivez-les :

a) David et René prirent le café et Emmanuel fit de même.
b) David prit le café, et René ou Emmanuel aussi.
c) David et René ont dîné tous les deux, ou bien David et Emmanuel prirent le café.
d) David a dîné, ainsi que Emmanuel ou René

	Lexique :	**Transcription :**
a)	A = David prend le café B = René prend le café C = Emmanuel prend le café	
b)	A = David prend le café B = René prend le café C = Emmanuel prend le café	
c)	A = David dine B = René dine C = David prend le café D = Emmanuel prend le café	
d)	A = David dine B = Emmanuel dine C = René dine	

Exercice 3 - Transcrivez le raisonnement suivant

Un élève malade ne peut passer son examen. Si l'élève mange du sushi ce midi, il risque une intoxication alimentaire et il sera malade. Il va aller manger du sushi ce midi. Donc, il ne passera pas l'examen.

Lexique :	Transcription :
A = L'élève est malade B = L'élève passe son examen C = L'élève mange du sushi le midi D = L'élève risque une intoxication	

Exercice 4 - Transcrivez le raisonnement suivant

Si Bonnie n'a pas rencontré Clyde dans la ruelle la nuit du vol, c'est que Clyde est le voleur ou que Bonnie est une menteuse. Si Clyde n'est pas le voleur, alors Bonnie ne l'a pas rencontré la nuit du vol et le crime a été commis après minuit. Si le crime a eu lieu après minuit, alors Clyde est le voleur ou Bonnie a menti. Donc, Clyde est le voleur.

Lexique :	Transcription :
A = Bonnie rencontre Clyde dans la ruelle la nuit du vol B = Clyde est le voleur C = Bonnie est une menteuse D = Le crime a été commis après minuit	

Transcriptions : Exercices 2

Exercice 5

Transcrivez le raisonnement suivant :

Je doute. Je doute seulement si je pense. Si je ne pense pas, je n'existe pas. Je n'existe pas à moins que je ne doute. Or, douter est équivalent à exister. Donc, j'existe.

Lexique :	Transcription :

Exercice 6

Transcrivez le raisonnement suivant :

Si Descartes n'est pas un sceptique, alors le doute cartésien est provisoire et si Descartes est un rationaliste, il est d'avis que toute connaissance certaine est a priori. Seulement si Descartes n'est pas un sceptique et s'il est un rationaliste, il trouvera une vérité certaine. Donc, si Descartes n'est pas d'avis que toute connaissance certaine est a priori, il ne trouvera pas une vérité certaine.

Lexique :	Transcription :

Exercice 7

Transcrivez le raisonnement suivant :

Descartes n'est pas un rationaliste à moins qu'il n'affirme l'existence des idées innées. Hume est un empiriste et toute connaissance est a posteriori. Seulement si les idées innées n'existent pas, alors Hume a raison. Il est vrai que les idées innées n'existent pas. Donc, Hume a raison et toute connaissance est a posteriori.

Lexique :	Transcription :
A = Descartes est un rationaliste B = Descartes affirme l'existence des idées innées C = Hume est un empiriste D = Toute connaissance est a posteriori E = les idées innées existent F = Hume a raison	

Transcriptions : Exercices 2

Exercice 8

Transcrivez le raisonnement suivant :

Nous ne sortons pas de la cave à moins de pouvoir apprécier le soleil. Mais pour que nous verrons le soleil, il faut que nous ayons le courage et que nous persuadions nos amis. Ou nos amies aiment voir le soleil, ou ils seront fâchés si nous les persuadons. Si nos amis sont fâchés, ils veulent nous tuer. Donc, nous sortons de la cave seulement si nos amis aiment voir le soleil.

Lexique :	Transcription :

Exercice 9

Transcrivez le raisonnement suivant :

Il n'est pas vrai que Christelle s'intéresse à la philosophie sans assister à des cours de philosophie. Elle n'assiste à des cours de philosophie que si elle a assez de motivation. Elle n'a pas assez de motivation à moins qu'elle ne lit Descartes et n'achète pas régulièrement des macarons. Donc, il est faux qu'uniquement si Christelle n'achète pas régulièrement des macarons, alors elle s'intéresse à la philosophie.

Lexique :	Transcription :

Exercice 10

Transcrivez le raisonnement suivant :

Si Joanne ne fait pas du shopping, elle mange des macarons ou elle fait ses exercices de logique, à moins qu'elle ne téléphone avec Hannah. Il n'est pas vrai qu'elle puisse à la fois faire ses exercices de logique, manger des macarons et téléphoner avec Hannah. Or, elle téléphone toujours avec Hannah si celle-ci a besoin d'elle. Elle fait ses exercices de logique ou elle mange des macarons seulement si elle ne téléphone pas avec Hannah. Donc, il est faux qu'elle fasse ses exercices de logique ou qu'elle mange des macarons si Hannah a besoin d'elle.

Lexique :	Transcription :

Exercice 11

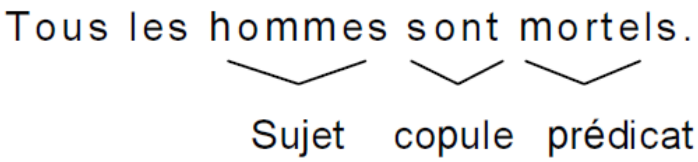
Transcrivez le raisonnement suivant :

Si nous n'aidons pas les réfugiés de la guerre civile syrienne, c'est que nous n'avons pas eu de pitié. Nous n'avons pas eu de pitié sans que les médias aient montré la situation de détresse. Nous nous apprêtons à ignorer le malheur des réfugiés à moins que les médias n'aient montré la situation de détresse. Donc, nous nous apprêtons à ignorer le malheur des réfugiés pourvue que nous n'aidons pas les réfugiés de la guerre civile syrienne.

Lexique :	Transcription :

1. Définition

La logique des prédicats sert à vérifier la validité des raisonnements où la structure interne des propositions élémentaires doit être analysée en termes de **<u>sujet et prédicat (= attribut, qualité).</u>**



Il est impossible de symboliser avec les moyens de la logique des propositions le raisonnement suivant : (1) **Tous** les hommes sont mortels. (2) **Socrate** est un homme. (3) Donc Socrate est mortel. Lexique : A = Tous les hommes sont mortels B = Socrate est un homme C = Socrate est mortel	Si nous essayons de rendre compte de la structure du raisonnement par les moyens utilisées dans la logique des propositions, nous aurons : (1) A (2) B $\vdash$ C Ceci n'est pas très convaincant, car rien nous permet de vérifier la validité de ce raisonnement.

Si nous voulons rendre compte d'un tel raisonnement**, <u>il faut tenir compte de la structure interne des propositions</u>** ! Pour faire cela, il faut d'abord connaître les différents types de propositions.

2. Les quatre types de propositions

La structure prédicative permet de distinguer quatre possibilités de propositions. En effet, on peut opérer deux distinctions :

- entre propositions affirmatives et négatives
- entre propositions **<u>universelles</u>** (générales) et **<u>existentielles</u>** (particulières)

Ces deux distinctions nous donnent les quatre types suivants :

a. proposition universelle affirmative: Tous, chaque, la totalité, l'ensemble des …
b. proposition universelle négative: Aucun, nul, personne, il n'existe pas …
c. proposition particulière affirmative: Quelques, certains, il y a, il existe …
d. proposition particulière négative: Quelques/certains/il y a … ne … pas …

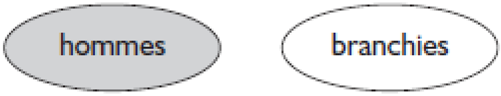
On appelle **<u>proposition singulière</u>** une proposition à sujet concret : Noms propres («Socrate», «César»); termes désignés (par «ce», «ces», «ceci», «cela», «celui-ci», «celui-là»); pronoms personnels («je», «tu» etc.); termes désignant un objet unique («le pape», «l'auteur du Rénert» etc.).

3. L'extension du sujet et du prédicat

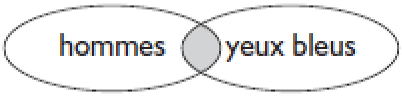
Suivant les quatre types de propositions, les sujets et les prédicats ont des extensions différentes, c'est-à-dire qu'ils s'appliquent à des ensembles plus ou moins grand d'êtres.

- «Tous les hommes sont mortels» signifie que «la **totalité** des hommes représente une **partie** des êtres mortels».

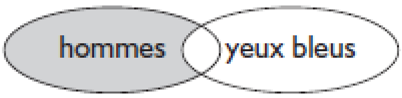
- «Aucun homme n'a de branchies (Kiemen)» signifie que «la **totalité** des hommes ne fait pas partie de la **totalité** des êtres ayant des branchies».



- «Quelques hommes ont les yeux bleus» signifie «Une **partie** des hommes correspond à une **partie** des êtres aux yeux bleus».



- «Quelques hommes n'ont pas les yeux bleus» signifie «Une **partie** des hommes ne fait pas partie de la totalité des êtres aux yeux bleus».



4. Symbolisation

Avec la logique des prédicats nous voyons l'introduction de quantificateurs qui nous permettent de faire des affirmations au sujet d'une, de plusieurs ou de tous les individus :

a) Spécialisation Existentielle ($\exists x$)

Si on a

$(\exists x)$ Sx [il existe au moins un individu « x », qui a la propriété « S »]

b) Spécialisation Universelle ($\forall x$)

Si on a

$(\forall x)$ Rx [tout individu « x » a la propriété « R »]

5. Exemple

Si on analyse le raisonnement auparavant en respectant la logique des prédicats, nous trouvons alors la structure suivante :

Exemple :	Lexique :
(1) **Tous** les hommes sont mortels. (2) **Socrate** est un homme. (3) Donc Socrate est mortel.	Ax = x est un homme Bx = x est mortel s = Socrate
Structure :	Transcription :
(1) Tous les A sont B (2) s est A (3) Donc s est B	(1) (∀x) [Ax → Bx] (Pour tous les hommes, on a qu'ils sont mortels) (2) As (Socrate est une proposition singulière, qui est un homme) ⊦ Bs (Socrate est mortel)

6. Interprétation de (∀x) et (∃x) (livre p.79)

Considérons la proposition :

«*Tous sont venus*» = (∀x) Ax

Ceci signifie aussi :

«*Il n'existe aucun individu qui ne soit pas venu*» = $\overline{(\exists x)\overline{Ax}}$

Nous voyons que les quantificateurs sont interdéfinissables. Nous pouvons dresser le tableau de ces relations:

Relations entre les quantificateurs:

$(\forall x)\ Ax$ «chaque x est venu»	⇔	$\overline{(\exists x)\overline{Ax}}$ «il n'y a pas de x qui ne soit pas venu»
$(\forall x)\ \overline{Ax}$ «chaque x n'est pas venu» *aucun x n'est venu*	⇔	$\overline{(\exists x)Ax}$ «il n'y a pas de x qui soit venu»
$\overline{(\forall x)Ax}$ « il est faux que tous les x soient venus» *tous les x ne sont pas venus*	⇔	$(\exists x)\ \overline{Ax}$ «il y a des x qui ne sont pas venus»
$\overline{(\forall x)\overline{Ax}}$ «il est faux qu'aucun x ne soit venu»	⇔	$(\exists x)\ Ax$ «il y a au moins un x qui est venu»

7. Remplacer les Quantificateurs

A) pour remplacer les quantificateurs:
1. on échange le quantificateur
2. on nie ce qui est lié par le quantificateur;
3. on nie l'expression entière

B) pour transformer l'expression $(\forall x)\,[Ax \rightarrow Bx]$:

$(\forall x)\,[Ax \rightarrow Bx]$ ⇔ $\overline{(\exists x)\left[\overline{Ax \rightarrow Bx}\right]}$ ⇔ $\overline{(\exists x)\left[Ax \wedge \overline{Bx}\right]}$

par la règle ci-dessus — par Implication niée

8. Conseils (livre p. 107-120)

Pour la symbolisation en logique des prédicats (PTR), on suivra les mêmes principes que pour la transcription en logique des propositions. On veillera en plus à:

- **reprendre dans le lexique:**
- les prédicats (*Eigenschaftsworte*) qui désignent les qualités (ou les propriétés) que les x sont censés posséder,
- un éventuel univers du discours (à savoir un prédicat qui reviendrait dans chacune des prémisses pour tous les x). En ce cas, x n'est plus indéfini, mais est délimité et prend donc une certaine signification qu'autrement il n'aurait pas;

- **identifier correctement les quantificateurs:**
- les propositions singulières (portant sur un individu clairement désigné par son nom) ne sont pas quantifiées,
- certaines prémisses peuvent comporter deux ou plusieurs propositions quantifiées,
- dans certaines locutions la quantification (universelle) n'est pas apparente (p.ex. les roses sont rouges = *toutes* les roses….),
- les <u>universelles s'expriment généralement par des *implications*</u> et les <u>existentielles par des *conjonctions*</u> (des exceptions sont possibles: «tous sont venus (A) **et** sont restés (B) » $(\forall x)\,[Ax \wedge Bx]$);

- **distinguer clairement les conditions nécessaires (CN) et les conditions nécessaires et suffisantes (CNS):**
- en transcrivant «seul» ou «seulement (si)» toujours par une (CN),
- en transcrivant «si et seulement si» toujours par une (CNS);

- **se laisser guider par son intuition et son bon sens:**
- ce qui en français est une universelle peut éventuellement être mieux saisi comme une existentielle ceci peut être très différent d'une personne à une autre,
- la question qu'il faut toujours se poser est: «*quel est le **sens** de la proposition à transcrire et est-ce que ma transcription est conforme à ce sens?*»,
- pour cerner le sens de la proposition, il peut s'avérer utile de la traduire en sa langue maternelle.

9. Exercices d’initiation

Déterminez le lexique, la structure et la transcription pour chacun des exercices suivants :

7.1. Proposition singulière (p.108)	
Hume est un empiriste et il est sceptique.	Lexique :
Structure :	Transcription :

7.2. Existentielle (p.108)	
Certains philosophes sont des rationalistes.	Lexique :
Structure :	Transcription :

7.3. Universelle (p.109)	
Les jeunes philosophes sont idéalistes.	Lexique :
Structure :	Transcription :

7.4. Universelle et Existentielle (p.109)	
Aucun philosophe n'est ignorant.	Lexique :
Structure :	Transcription 1 :
Alternative :	Transcription 2 :

7.5. Expressions traîtresse : Quantification universelle niée (p.110)	
Tous les philosophes ne sont pas ignorants.	Lexique :
Structure :	Transcription 1 :
Alternative :	Transcription 2 :

7.5. Double négation (p.110)	
Aucun philosophe n'est inintéressant.	Lexique :
Structure :	Transcription 1 :
Alternative :	Transcription 2 :

7.5. Condition Nécessaire (CN) (p.112)	
Seuls les cygnes noirs ne sont pas blancs.	Lexique :
Structure :	Transcription :

<table>
<tr><th colspan="2">7.5. Condition Nécessaire et Suffisante (CNS) (p.117)</th></tr>
<tr><td>Tous sauf les philosophes sont déraisonnables.</td><td>Lexique :</td></tr>
<tr><td>Structure :</td><td>Transcription :</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">7.5. Cas particulier (p.118)</th></tr>
<tr><td>Les rationalistes et les empiristes sont raisonnables, mais tous ne doutent pas.</td><td>Lexique :</td></tr>
<tr><td>Structure :</td><td>Transcription :</td></tr>
</table>

Logique des prédicats : Transcriptions (PTR) - Exercices préliminaires (niveau avancé)

	Lexique	Transcription
1. Les éléphants sont des mammifères	Ax : x est éléphant Bx : x est mammifère	
2. Certains élèves sont présents.	Ax : x est élève Bx : x est présent	
3. Les loups ne sont pas tous dangereux.	Ax : x est éléphant Bx : x est dangereux	
4. Tout ce qui brille n'est pas en or.	Ax : x brille Bx : x est de l'or	
5. Aucun Visiteur ne reste pour le dîner.	Ax : x est visiteur Bx : x reste pour le dîner	
6. Quelques élèves sont à la fois intelligents et appliqués.	Ax : x est élève Bx : x est intelligent Cx : x est appliqué	
7. Celui qui combat par l'épée périra par l'épée.	Ax : x combat par l'épée Bx : x périt par l'épée	
8. Les bons conseils ne sont pas tous appréciés.	Ax : x est bon Bx : x est conseil Cx : x est apprécié	
9. Heureux l'homme qui connaît ses propres limites.	Ax : x est heureux Bx : x est homme Cx : x connaît ses propres limites	
10. Jean-Claude n'est pas un philosophe.	Ax : x est un philosophe a : Jean-Claude	
11. Tous les citoyens à l'exception des fonctionnaires de l'Etat peuvent être élus.	Ax : x est citoyen Bx : x est fonctionnaire de l'Etat Cx : x est éligible	
12. Personne ne réussira à moins de s'efforcer de tout son cœur.	Ax : x réussit Bx : x s'efforce de tout son cœur	
13. Pas de roses sans épines.	Ax : x est une rose Bx : x a des épines	

14. Un homme sans cœur n'aura pas de vrais amis.	Ax : x est un homme Bx : x a du cœur Cx : x a de vrais amis	
15. Rien n'est connu si ce n'est que par l'intermédiaire des sens et de la raison.	Ax : x est connu Bx : x passe par les sens Cx : x passe par la raison	

16. Certains cadres supérieurs sont les seuls à avoir un secrétaire.	Ax : x est cadre supérieur Bx : x a un secrétaire	
17. Les visiteurs ne restent pas tous pour dîner.	Ax : x est visiteur Bx : x reste pour dîner	
18. Aucun manteau n'est imperméable à moins qu'il n'ait été imprégné.	Ax : x est manteau Bx : x est imperméable Cx : x a été imprégné	
19. Seuls les enseignants peuvent utiliser l'ascenseur.	Ax : x est enseignant Bx : x peut utiliser l'ascenseur	
20. Quelques médicaments ne sont dangereux que s'ils sont pris à de fortes doses.	Ax : x est médicament Bx : x est dangereux Cx : x est pris à de fortes doses	
21. Aucune fille n'est gentille à moins qu'elle ne soit bien éduquée.	Ax : x est fille Bx : x est gentil Cx : x est bien éduqué	
22. Ceux qui parlent beaucoup n'ont pas tous beaucoup à dire.	Ax : x parle beaucoup Bx : x a beaucoup à dire	
23. Parmi les soldats, il y a des hommes et des femmes.	Ax : x est soldat Bx : x est homme Cx : x est femme	
24. Il y a des passions qui ne sont pas blâmables.	Ax : x est une passion Bx : x est blâmable	
25. Seuls les membres du club peuvent assister à l'assemblée générale.	Ax : x est membre du club Bx : x peut assister à l'assemblée générale	
26. Tout ce qui est agréable est ou bien immoral ou bien illégal ou bien malsain.	Ax : x est agréable Bx : x est immoral Cx : x est illégal Dx : x est malsain	

27. Les acteurs qui sont célèbres n'ont pas tous du talent.	Ax : x est acteur Bx : x est célèbre Cx : x a du talent	
28. Aucune voiture qui a plus de dix années de service ne sera réparée si elle est accidentée.	Ax : x est une voiture Bx : x a plus de dix années de service Cx : x est réparé Dx : x est accidenté	
29. Quelques jeunes filles ne sont gentilles que si elles sont bien éduquées.	Ax : x est jeune Bx : x est fille Cx : x est gentil Dx : x est bien éduqué	
30. Quelques jeunes filles sont gentilles si elles sont bien éduquées.	Ax : x est jeune Bx : x est fille Cx : x est gentil Dx : x est bien éduqué	

31. Pierre qui roule n'amasse pas mousse.	Ax : x est une pierre Bx : x roule Cx : x amasse de la mousse	
32. Parmi les professeurs, il y a des philosophes et des mathématiciens, mais nul n'est paléontologue.	Ax : x est professeur Bx : x est philosophe Cx : x est mathématicien Dx : x est paléontologue	
33. Pour mesurer son ignorance, il faut être instruit.	Ax : x mesure son ignorance Bx : x est instruit	
34. Ce qui se conçoit bien s'énonce clairement.	Ax : x se conçoit bien Bx : x s'énonce clairement	
35. Presque tous les invités sont venus à la réception.	Ax : x est invité Bx : x est venu à la réception	
36. Rien ne s'énonce clairement à moins d'être bien conçu.	Ax : x s'énonce clairement Bx : x est bien conçu	
37. Tous, sauf les lecteurs du Figaro, sont mal informés.	Ax : x est lecteur du Figaro Bx : x est bien informé	

38. Si les abonnés du Figaro ne lisent pas leur journal ou le comprennent de travers, ils sont mal informés.	Ax : x est abonné du Figaro Bx : x lit son journal Cx : x comprend le journal à travers Dx : x est bien informé	
39. Tous les amateurs ne viendront pas, mais tous les professionnels non plus.	Ax : x est amateur Bx : x vient Cx : x est professionnel	
40. Il est faux de dire que tous les avocats sont des philosophes.	Ax : x est avocat Bx : x est philosophe	
41. Quiconque travaille tard le soir ne se réveille pas tôt le matin.	Ax : x travaille tard le soir Bx : x se réveille tôt le matin	
42. Il n'est pas vrai que les oiseaux sont des mammifères, mais il est vrai que les hirondelles reviennent en printemps.	Ax : x est oiseau Bx : x est mammifère Cx : x est hirondelle Dx : x revient en printemps	
43. Gilbert joue aux quilles si et seulement si Robert joue aussi.	Ax : x joue aux quilles a : Gilbert b : Robert	
44. La plupart des professeurs et aucun élève ne voudra participer à l'Olympiade Mathématique.	Ax : x est professeur Bx : x est élève Cx : x participe à l'Olympiade Mathématique	
45. Si seuls les philosophes sont de bons politiciens et si les seuls à pouvoir gouverner un pays sont des amateurs de la philosophie, alors il est faux qu'il y ait un politicien sans formation philosophique.	Ax : x est philosophe Bx : x est bon Cx : x est politicien Dx : x peut gouverner un pays Ex : x est amateur de la philosophie Fx : x a eu une formation philosophique	

Exercices livre p. 121

• PTR 6 • PTR 8 • PTR 10 • PTR 20	• PTR 26 • PTR 29 • PTR 34

Logique des propositions: la méthode des arbres (MA)

1. Définition

La méthode des arbres (MA) est une méthode pour vérifier si un raisonnement logique est valide ou non.

2. Principe

Normalement, afin de vérifier un raisonnement logique, il faut établir une « table de vérité », qui donne la valeur de vérité des propositions complexes à partir des valeurs de vérité des propositions élémentaires qui la composent.

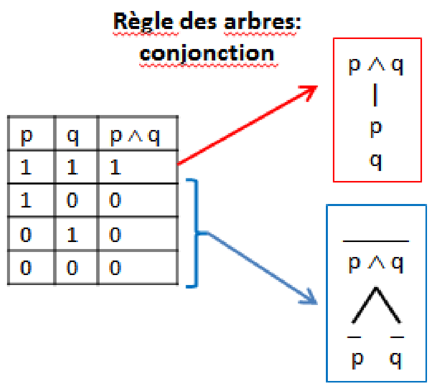
- Par exemple :

« Le soleil brille et il fait chaud. »

Quand est-ce qu'on peut dire que cette proposition complexe est vraie dans son ensemble ?

- Table de vérité :

p = le soleil brille	q = il fait chaud	p ∧ q = le soleil brille et il fait chaud
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0



On peut donc constater que cette proposition complexe est vraie si et seulement si ses propositions élémentaires (p et q) sont vraies aussi.

- **Problème :**

Or, pour des propositions encore plus complexes qui sont composées d'une multitude de propositions élémentaires le nombre de lignes dans notre tableau de vérité augmente d'une façon exponentielle. Ceci n'est guère efficace.

- **Solution :**

On utilise la méthode des arbres! Cette méthode consiste en l'admission par hypothèse que le raisonnement n'est pas valide et que la conclusion est donc fausse.

Dans cette situation, deux cas sont donc possibles :

a) L'hypothèse de la fausseté de la conclusion mène dans tous les cas à des contradictions. ➔ Ceci signifie donc qu'il faut admettre le contraire de notre hypothèse (que la conclusion est vraie).
b) L'hypothèse ne produit pas toujours des contradictions. ➔ Ceci signifie donc que notre hypothèse doit être vraie (que la conclusion et le raisonnement sont faux).

3. Méthode des arbres : les règles de décomposition

	Règle	Table de vérité			Explication
Formes conjonctives	Conjonction $p \wedge q$ p q	p	q	$p \wedge q$	Si une conjonction est vraie, alors p et q sont vrais.
		1	1	1	
		1	0	0	
		0	1	0	
		0	0	0	
	Disjonction niée $\overline{p \vee q}$ $\overline{p}$ $\overline{q}$	p	q	$\overline{p \vee q}$	Si une disjonction est fausse, alors p et q sont faux.
		1	1	0	
		1	0	0	
		0	1	0	
		0	0	1	
	Implication niée $\overline{p \rightarrow q}$ p $\overline{q}$	p	q	$\overline{p \rightarrow q}$	Si une implication est fausse, alors p est vrai et q est faux.
		1	1	0	
		1	0	1	
		0	1	0	
		0	0	0	
Formes disjonctives	Implication $p \rightarrow q$ $\overline{p}$ q	p	q	$p \rightarrow q$	Si une implication est vraie, alors ou bien p est faux ou bien q est vrai.
		1	1	1	
		1	0	0	
		0	1	1	
		0	0	1	
	Disjonction $p \vee q$ p q	p	q	$p \vee q$	Si une disjonction est vraie, alors p ou q est vrai.
		1	1	1	
		1	0	1	
		0	1	1	
		0	0	0	
	Conjonction niée $\overline{p \wedge q}$ $\overline{p}$ $\overline{q}$	p	q	$\overline{p \wedge q}$	Si une conjonction est fausse, alors ou bien q est faux ou bien p est faux.
		1	1	0	
		1	0	1	
		0	1	1	
		0	0	1	
	Equivalence $p \leftrightarrow q$ $\overline{p}$ p $\overline{q}$ q	p	q	$p \leftrightarrow q$	Si une équivalence est vraie, alors ou bien p et q sont vrais ou bien p et q sont faux.
		1	1	1	
		1	0	0	
		0	1	0	
		0	0	1	
	Equivalence niée $\overline{p \leftrightarrow q}$ p $\overline{p}$ $\overline{q}$ q	p	q	$\overline{p \leftrightarrow q}$	Si une équivalence est fausse, alors ou bien p est vrai et q est faux ou bien p est faux et q est vrai.
		1	1	0	
		1	0	1	
		0	1	1	
		0	0	0	

4. De la symbolisation à la méthode des arbres

Supposons le raisonnement suivant :

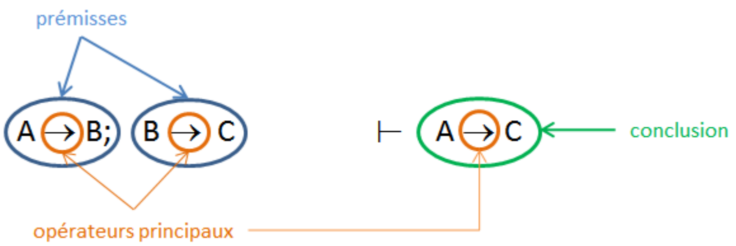
Si Suzanne part en vacances, alors elle s'amuse.

Si Suzanne s'amuse, elle est contente.

Donc, si Suzanne part en vacances, elle est contente.

Lexique :	Transcription :
A = Suzanne part en vacances	1. $A \rightarrow B$
B = Suzanne s'amuse	2. $B \rightarrow C$
C = Suzanne est contente	|-- $A \rightarrow C$

Vérifions donc par la méthode des arbres, si le raisonnement est valide ou non:



Étape 1

Copiez les prémisses l'une en dessous de l'autre, de façon à ce que les opérateurs principaux soient centrés verticalement.

$A \rightarrow B$

$B \rightarrow C$

$\overline{A \rightarrow C}$

Étape 2

Ajoutez la conclusion **niée**.

Étape 3

Décomposez successivement les formules conformément aux règles de décomposition (cf. feuille).

Inscrivez le résultat de la décomposition sur toutes les branches ouvertes sur lesquelles figure la formule à décomposer (ici, il y a seulement une branche).

Pour éviter d'avoir trop d'embranchements il faut d'abord **privilégier les règles de forme conjonctive** (conjonction, disjonction niée et implication niée).

Ici, on commence donc par la 3ème formule.

$A \rightarrow B$

$B \rightarrow C$

$\overline{A \rightarrow C}$ ✔ 1

|

A

$\overline{C}$

Notation qui veut dire:
« J'utilise cette formule en 1er lieu. »

Règle de décomposition en question

Implication niée

$\overline{p \rightarrow q}$

|

p

$\overline{q}$

Étape 4

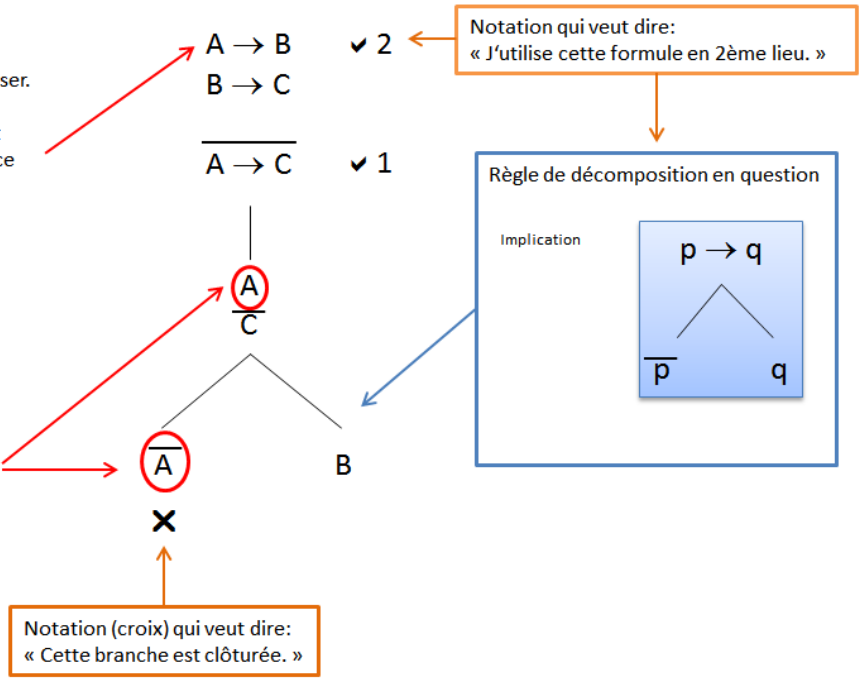
Il reste encore 2 formules à décomposer.

Puisque les 2 formules restantes sont des formes disjonctives, on commence simplement par la première formule.

Comme dans l'étape précédente, on inscrit le résultat de décomposition sur toutes le branches (il y a toujours une seule branche).

Étape 5

Clôturez toutes le branches sur lesquelles apparaissent des **contradictions**. Ici, il y a une contradiction: A et non-A!



Étape 6

Il reste encore 1 formule à décomposer.

Comme dans l'étape précédente, on inscrit le résultat de décomposition sur toutes le branches (une branche est clôturée, alors il reste une seule branche).

Étape 7

Clôturez toutes les branches sur lesquelles apparaissent des **contradictions**. Ici, il y a deux contradictions:

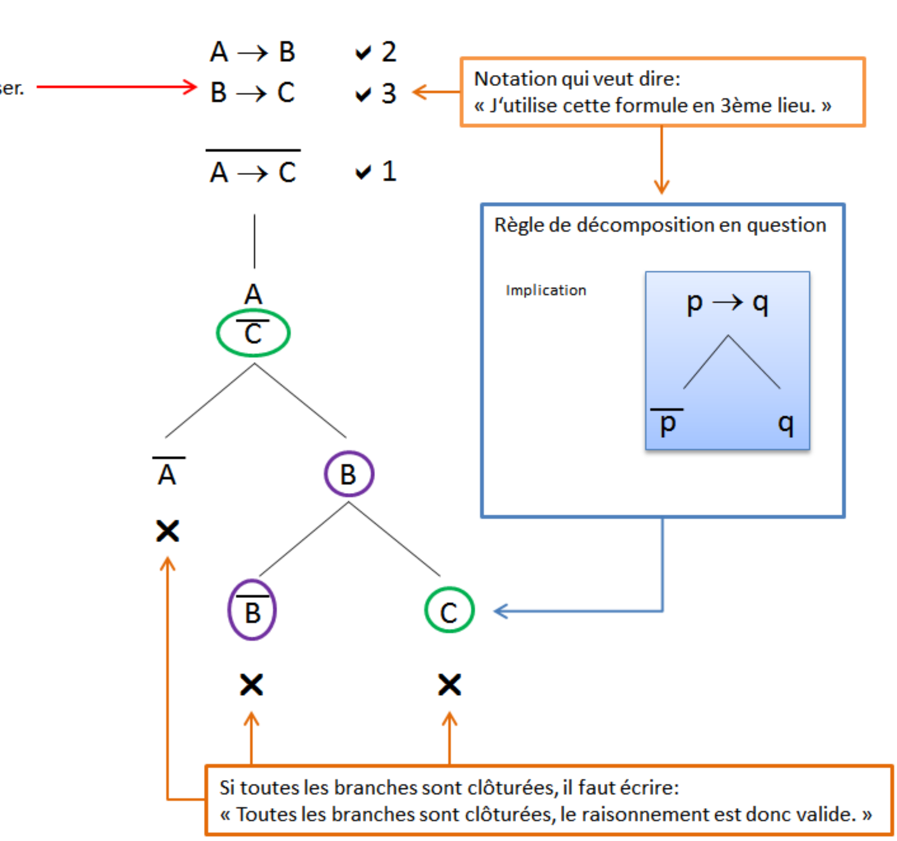
B et non-B

C et non-C

Étape 8

Si toutes les formules sont décomposées et

- **toutes les branches sont clôturées, le raisonnement est <u>valide</u>!**
- **une ou plusieurs branches restent ouvertes, le raisonnement <u>n'est pas valide</u>!**



5. Exercice :

Si Suzanne va à l'école, alors elle s'amuse et elle apprend quelque chose.

Suzanne ne va pas à l'école.

Donc, il n'est pas vrai que Suzanne s'amuse et apprenne quelque chose.

Lexique :	Transcription :
A = Suzanne va à l'école B = Suzanne s'amuse C = Suzanne apprend quelque chose	$A \rightarrow (B \wedge C)\ ;\ \overline{A} \quad \vert\text{--}\ \overline{(B \wedge C)}$

Vérifiez le raisonnement par la méthode des arbres :

Conclusion :

Devoir à domicile :

5.1. $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)\ ;\ C \leftrightarrow D\ ;\ \overline{D} \vee E \quad \vert\text{--}\ A \rightarrow E$

5.2. $\overline{P} \wedge Q\ ;\ Q \vee R \quad \vert\text{--}\ \overline{P \leftrightarrow Q}$

5.3. $\overline{S} \rightarrow \overline{R}\ ;\ \overline{R} \rightarrow (\overline{T} \wedge \overline{P}) \quad \vert\text{--}\ (T \rightarrow Q) \vee S$

Exercices supplémentaires, voir Collegium Logicum MA 1 – 21 p. 138 !

1. Définition

La méthode des arbres dans la logique des prédicats est une méthode pour vérifier des raisonnements logiques qui portent sur des quantificateurs.

2. Principe

Avec la logique des prédicats nous avons vu l'introduction de quantificateurs qui nous permettent de faire des affirmations au sujet d'une, de plusieurs ou de tous les individus. Ainsi, pour tester la validité d'un raisonnement en logique des prédicats, il faut introduire deux règles nouvelles :

c) Spécialisation Existentielle

Si on a

$(\exists x)$ Sx [il existe au moins un individu « x », qui a la propriété « S »]

alors on peut déduire qu'il y a au moins une spécialisation possible (a ou b ou c ou…). On est donc autorisé à faire une seule spécialisation. Nous avons donc :

$$(\exists x)\ Sx \quad \rightarrow \quad Sa$$

La spécialisation est seulement possible pour des individus n'ayant pas encore été utilisés dans le contexte du raisonnement à vérifier.

Si on a donc une deuxième existentielle

$(\exists x)$ Px [il existe au moins un individu « x », qui a la propriété «P»]

il faut la spécialiser de la manière suivante :

$$(\exists x)\ Px \quad \rightarrow \quad Pb$$

d) Spécialisation Universelle

Si on a

$(\forall x)$ Rx [tout individu « x » a la propriété « R »]

alors on peut en déduire que tout individu quelconque a, b, c, etc… a nécessairement la propriété « R ». Nous avons donc :

$$(\forall x)\ Rx \quad \rightarrow \quad Ra$$

Puisque nous avons encore une deuxième existentielle, il faut y ajouter :

$$(\forall x)\ Rx \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} Ra \\ Rb \end{array}$$

3. De la transcription des prédicats à la logique des arbres

La méthode des arbres dans la logique des prédicats se fait en trois étapes :

a) La transformation

1. Copier les prémisses les unes à la suite des autres.
2. Ajouter la conclusion sous forme niée.
3. Si une formule contient plusieurs quantificateurs, il faut la décomposer selon les règles de décomposition (les existentielles avant les universelles). Par exemple :

$$(\forall x)\ Ax \rightarrow (\exists x)\ Bx$$

$$\overline{(\forall x)\ Ax} \qquad (\exists x)\ Bx$$

4. Transformer les quantificateurs niés en quantificateurs non-niés conformément à la règle de transformation suivante :

$$\overline{(\forall x)Ax} \leftrightarrow (\exists x)\overline{Ax}$$
$$\overline{(\exists x)Ax} \leftrightarrow (\forall x)\overline{Ax}$$
$$\overline{(\forall x)\overline{Ax}} \leftrightarrow (\exists x)Ax$$
$$\overline{(\exists x)\overline{Ax}} \leftrightarrow (\forall x)Ax$$

5. Déterminer le nombre d'existentielles.

b) La modélisation

6. Spécifier toutes les existentielles en introduisant dans chaque existentielle une constante différente (a, b, c, etc…). Par exemple :

$$(\exists x)\ Ax \leftrightarrow Bx \quad \rightarrow \quad Aa \leftrightarrow Ba$$

$$(\exists x)\ Cx \vee Dx \quad \rightarrow \quad Cb \vee Db$$

7. Introduire toutes les constantes spécifiées (a, b, c, etc…) dans chaque universelle. Par exemple :

$$(\forall x)\ Rx \wedge Qx \quad \rightarrow \quad Ra \wedge Qa$$

$$Rb \wedge Qb$$

c) La vérification

8. Résoudre l'exercice en utilisant les règles de décomposition de la méthode des arbres.

4. Exemples

4.1.

prémisses

(∃x) Px; (∀x) [Px → Qx] ⊢ (∃x) Qx ← conclusion

2 Existentielles et 1 Universelle

Arbre de vérification

Étape 1

Copiez les **prémisses** l'une en dessous de l'autre.

$(\exists x)\, Px$ ✔ 2

$(\forall x)\, [Px \rightarrow Qx]$ ✔ 4

Étape 2

Ajoutez la **conclusion** **niée**.

$\overline{(\exists x)\, Qx}$ ✔ 1

Transformation

Étape 3

Si une formule contient **plusieurs quantificateurs**, il faut la **décomposer.** Ici, aucune formule ne contient plusieurs quantificateurs.

Étape 4

Transformer les quantificateurs niés en **quantificateurs non-niés**.

$(\forall x)\, \overline{Qx}$ ✔ 3

Modélisation

Étape 5

Déterminer le **nombre d'existentielles**. Ici il y a seulement une existentielle.

Pa

$\overline{Qa}$

$Pa \rightarrow Qa$ ✔ 5

Étape 6 + 7

On introduit les **constantes spécifiées** dans **chaque universelle**. Ici on a qu'une seule constante.

Vérification

Étape 8

Nous terminons la vérification en utilisant des **règles de décomposition**.

$\overline{Pa}$	Qa
X	X

Toutes les branches sont clôturées, le raisonnement est donc valide.

4.2.

$$(\forall x)\,[Ax \rightarrow Bx]\ ;\ \ (\forall x)\,[\overline{Ax} \rightarrow \overline{Cx}]\ ;\ \ (\exists x)\,[Ax \wedge Ex] \wedge (\forall x)\,[\overline{Cx} \rightarrow \overline{Ex}]\ ;\ (\exists x)\,[Cx \wedge \overline{Bx}]\ \vdash (\exists x)\,[Bx \rightarrow Ax]$$

Arbre de vérification

Étape 1

Copiez les **prémisses** l'une en dessous de l'autre.

Étape 2

Ajoutez la **conclusion** **niée**.

$(\forall x)\,[Ax \rightarrow Bx]$ ✓ 5

$(\forall x)\,[\overline{Ax} \rightarrow \overline{Cx}]$ ✓ 6

$(\exists x)\,[Ax \wedge Ex] \wedge (\forall x)\,[\overline{Cx} \rightarrow \overline{Ex}]$ ✓ 2

$\boxed{(\exists x)}\,[Cx \wedge \overline{Bx}]$ ✓ 3

$\overline{(\exists x)\,[Bx \rightarrow Ax]}$ ✓ 1

Transformation

Étape 3 + 4

Transformer les quantificateurs niés en **quantificateurs non-niés** et **décomposer** les formules qui contiennent **plusieurs quantificateurs**.

$(\forall x)\,\overline{Bx \rightarrow Ax}$ ✓ 7

$\boxed{(\exists x)}\,[Ax \wedge Ex]$ ✓ 4

$(\forall x)\,[\overline{Cx} \rightarrow \overline{Ex}]$ ✓ 8

Modélisation

Étape 5

Déterminer le **nombre d'existentielles**. Ici il y a 2 existentielles.

Étape 6

On introduit les **constantes spécifiées** dans **chaque universelle (a et b)**.

Étape 7

Introduire toutes les constantes spécifiées (a et b) dans chaque universelle.

$Ca \wedge \overline{Ba}$ ✓ 9

$Ab \wedge Eb$

$Aa \rightarrow Ba$ ✓ 10

$Ab \rightarrow Bb$

$\overline{Aa} \rightarrow \overline{Ca}$ ✓ 11

$\overline{Ab} \rightarrow \overline{Cb}$

$\overline{Ba \rightarrow Aa}$

$\overline{Bb \rightarrow Ab}$

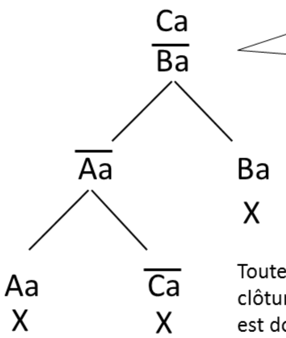
$\overline{Ca} \rightarrow \overline{Ea}$

$\overline{Cb} \rightarrow \overline{Eb}$

Vérification

Étape 8

Nous terminons la vérification en utilisant des **règles de décomposition**.



Nous vérifions les expressions du modèle individu par individu.
Conseil: ce n'est pas forcément avec l'individu **«a» que l'on ferme plus vite!**

Toutes les branches sont clôturées, le raisonnement est donc valide.

PMA 2 $(\forall x)\,[Cx \rightarrow (Sx \vee Tx)];\ (\forall x)\,[Sx \rightarrow Nx];\ \overline{(\forall x)[Cx \rightarrow Nx]}$

1988 (2) $\vdash\ (\exists x)\,[Cx \wedge Tx]$

valide

PMA 19 $(\forall x)\,[\overline{Ax} \vee (Bx \vee Cx)];\ (\exists x)\,[Ax \wedge Bx];\ \overline{(\forall x)[Ax \rightarrow Bx]}$

1996 (1) $\vdash\ (\exists x)\,[Ax \wedge Cx]$

valide, ∃ multiples

PMA 23 $(\exists x)\,[Ax];\ (\exists x)\,[Ax] \rightarrow \overline{(\exists x)Bx}\,;\ (\forall x)\,[\overline{Bx} \rightarrow (Cx \rightarrow Dx)]$

1997 (2) $\qquad \vdash\ (\forall x)\,[Cx \rightarrow Dx]$

valide, ∃ multiples

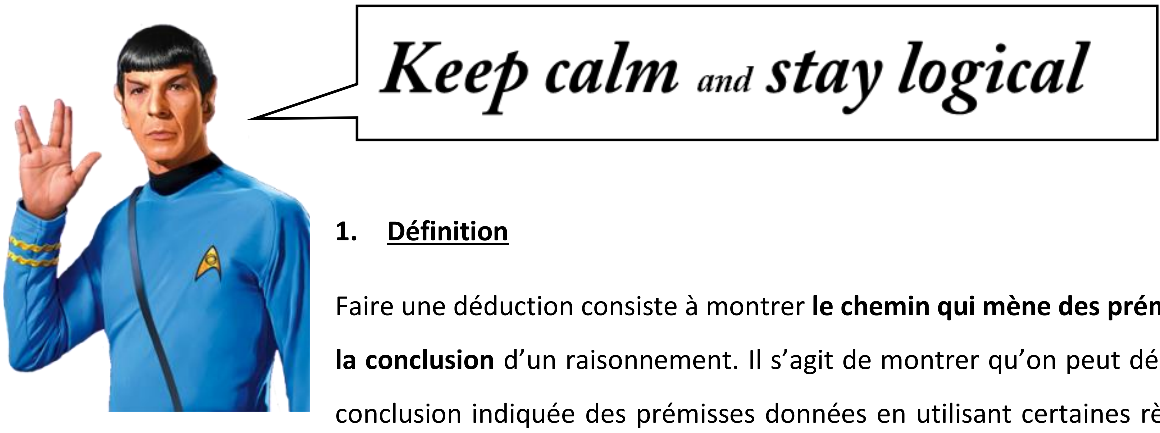
PMA 29 $(\forall x)\,[Ax \rightarrow \overline{Cx}\,] \wedge (\exists x)\,[\,Cx \wedge Dx];\ (\forall x)\,[Dx \leftrightarrow Ax];\ (\exists x)\,Ax$

2000 (2) $\qquad \vdash\ (\exists x)\ \overline{Cx}\ \vee (\exists x)\ \overline{Dx}$

valide, ∃ multiples

Exercices livre page 150 :

• PMA 1	• PMA 10
• PMA 6	• PMA 14
• PMA 8	• PMA 17
• PMA 9	• PMA 29



1. Définition

Faire une déduction consiste à montrer **le chemin qui mène des prémisses à la conclusion** d'un raisonnement. Il s'agit de montrer qu'on peut déduire la conclusion indiquée des prémisses données en utilisant certaines règles de déduction et lois logiques :

- **Les règles de déduction (RD)** sont des schémas de raisonnement qui ont pour effet de décomposer une formule complexe en une ou des parties plus simples. Les **RD ne s'appliquent que sur des lignes entières**, jamais sur des parties d'expressions.

- **Les lois logiques (LL)** servent à transformer des propositions données en d'autres propositions plus facilement décomposables à l'aide des règles de déduction. Les **LL peuvent être appliquées sur des parties d'expressions**.

Nous allons distinguer trois sortes de déduction :

a. **La preuve formelle simple (PS)** qui consiste à transformer les prémisses de manière à aboutir à la conclusion.

b. **La preuve conditionnelle (PC)** qui consiste à admettre une hypothèse (condition) pour déduire la conclusion. La preuve conditionnelle se fait toujours avec une implication.

c. **La réduction à l'absurde (RA)** qui consiste à montrer que la conclusion est vraie, car il serait absurde d'admettre son contraire. Pour faire une réduction à l'absurde il faut nier la conclusion et trouver une contradiction.

Pour faire une déduction par preuve formelle, <u>on ne peut pas donner une démarche à suivre définitive et univoque</u>. Une procédure comme pour la vérification par la méthode des arbres n'existe pas.

Afin d'éviter l'utilisation arbitraire de LL et RD et de suivre une démarche compréhensible il faut **indiquer** pour chaque ligne quelle procédure (LL ou RD) a été utilisée et sur quelle(s) ligne(s).

<u>Se donner une stratégie en :</u>

- **identifiant** dans les prémisses la localisation des éléments qui constituent la conclusion,
- **déterminant** ce qu'il faut éliminer pour arriver à ces éléments,
- **se demandant** quelle RD et/ou LL pourrait être utilisée pour cela,
- **imaginant** comment il faut éventuellement recomposer les éléments pour arriver à la conclusion,
- **sachant** que fusionner deux lignes est souvent un moyen pour déduire une conclusion sous forme d'une proposition présente dans deux prémisses différentes.

<u>Utiliser à bon escient les RD, considérant que :</u>

- Certaines règles peuvent servir à ***simplifier*** des expressions complexes, respectivement à ***isoler*** un élément d'une telle expression :

  simplification / syllogisme disjonctif / modus ponens / modus tollens

- D'autres règles permettent ***d'adjoindre*** des éléments en expressions plus complexes comme :

  conjonction / addition

- D'autres règles encore permettent de ***fusionner*** deux expressions différentes comme :

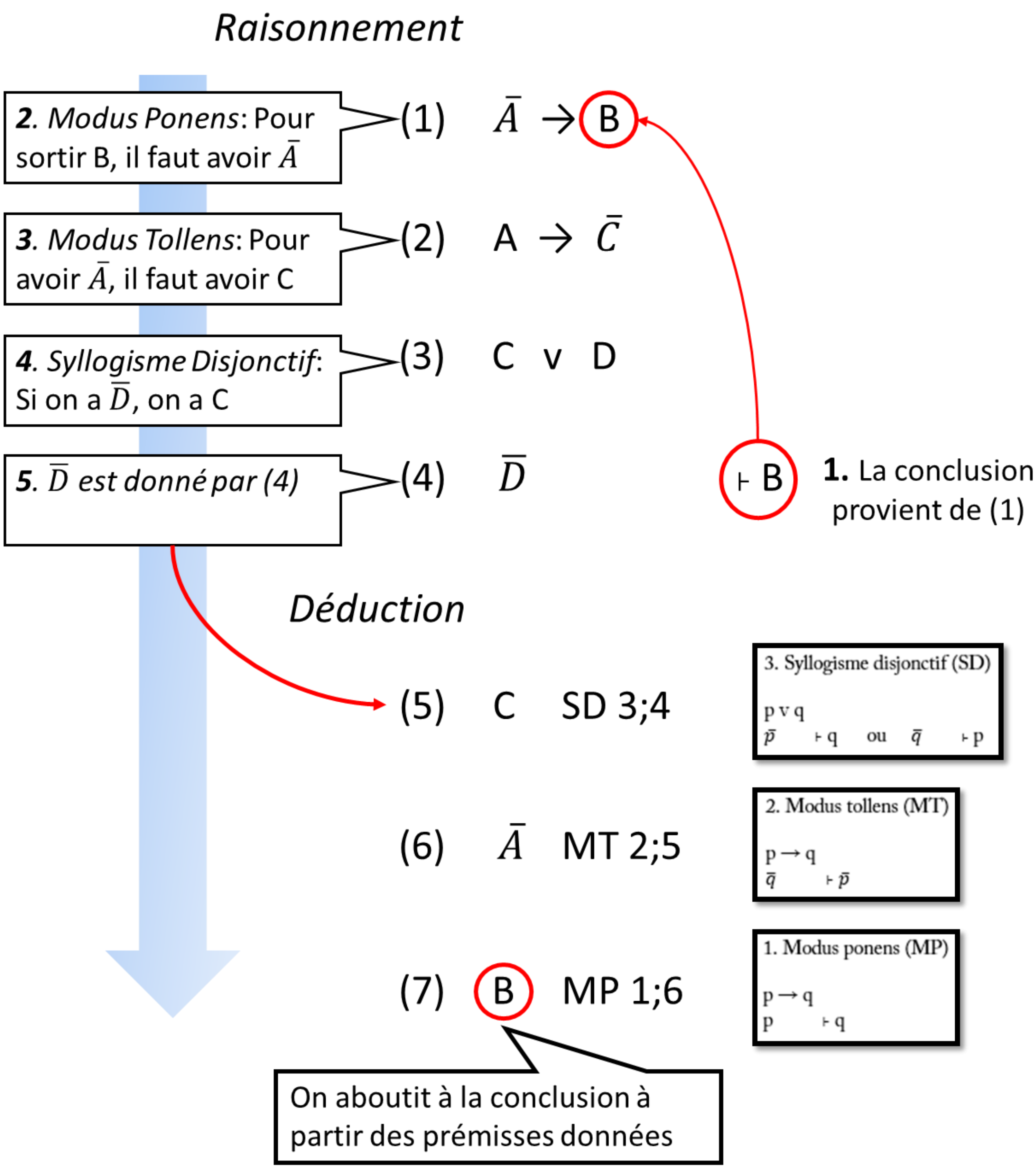
  syllogisme hypothétique

<u>On a le plus souvent intérêt à :</u>

- ***réduire*** une conjonction **$p \land q$** par simplification ***en deux expressions p ;q***
- **éliminer les équivalences $p \leftrightarrow q$** (Equiv) pour obtenir des conjonctions **$(p \to q) \land (q \to p)$**
- **transformer une implication niée** $\overline{p \to q}$ pour obtenir une conjonction **$p \land \overline{q}$**

- **trouver des implications du type p → $\overline{p}$** (SH), puis transformer en disjonction $\overline{p}$ **v** $\overline{p}$ (Imp), pour trouver une tautologie $\overline{p}$ (Taut)

<u>Exercice 1 (p.158)</u>



Exercice 2 (p.159)

Raisonnement

2. *Modus Tollens*: Pour sortir (A v B), il faut avoir ($\overline{\bar{C} \wedge D}$)

(1) (A v B) → ($\bar{C}$ ∧ D)

3. *Il faut construire* ($\overline{\bar{C} \wedge D}$) à partir de (2)

a. Addition: C $\boxed{\mathbf{v}\ \bar{D}}$

b. De Morgan: ($\overline{\bar{C} \wedge D}$)

(2) C

⊦ $\bar{B}$ **1.** La conclusion provient de (1)

Déduction

(3) C v $\bar{D}$ Add 2

7. Addition (Add)

p ⊦ p v q

4. *De Morgan:* Transformer une disjonction en une conjonction (et vice versa)

(4) $\overline{\bar{C} \wedge D}$ DM 3

1. De Morgan (DM)

$\overline{p \wedge q}$ ⇔ ($\bar{p}$ v $\bar{q}$)
$\overline{p \vee q}$ ⇔ ($\bar{p} \wedge \bar{q}$)

(5) $\overline{A \vee B}$ MT 1;4

2. Modus tollens (MT)

p → q
$\bar{q}$ ⊦ $\bar{p}$

5. *De Morgan:* La conjonction nous permet de simplifier et de sortir $\bar{B}$

(6) $\bar{A} \wedge \bar{B}$ DM 5

1. De Morgan (DM)

$\overline{p \wedge q}$ ⇔ ($\bar{p}$ v $\bar{q}$)
$\overline{p \vee q}$ ⇔ ($\bar{p} \wedge \bar{q}$)

(7) $\bar{B}$ Simp 6

5. Simplification (Simp)

p ∧ q ⊦ p
p ∧ q ⊦ q

On aboutit à la conclusion à partir des prémisses données

Exercice 3 (p.160)

Raisonnement

2. *Modus Tollens*: Pour sortir $\overline{\bar{B} \wedge \bar{K}}$, il faut avoir $\overline{A \wedge \bar{T}}$

(1) $(\bar{B} \wedge \bar{K}) \rightarrow (A \wedge \bar{T})$

3. *Il faut construire* $\overline{(A \wedge \bar{T})}$ à partir de (2)

a. Simp: $\bar{A}$

b. Add: $\bar{A}$ **v T**

c. DM: $\overline{A \wedge \bar{T}}$

(2) $\bar{A} \wedge \bar{B}$ ⊢ K v R

1. Une partie de la conclusion provient de (1) mais le terme R ne se trouve pas dans les prémisses. Il faut ajouter **R** <u>par addition</u> après avoir déduit **K**.

Déduction

(3)	$\bar{A}$	Simp 2
(4)	$\bar{B}$	Simp 2
(5)	$\bar{A}$ v T	Add 3
(6)	$\overline{A \wedge \bar{T}}$	DM 5
(7)	$\overline{\bar{B} \wedge \bar{K}}$	MT 1;6
(8)	B v K	DM 7
(9)	K	SD 4;8
(10)	K **v R**	Add 9

5. Simplification (Simp)

p ∧ q ⊢ p
p ∧ q ⊢ q

7. Addition (Add)

p ⊢ p v q

1. De Morgan (DM)

$\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow (\bar{p} \vee \bar{q})$
$\overline{p \vee q} \Leftrightarrow (\bar{p} \wedge \bar{q})$

4. *Modus Tollens: Après avoir construit* $\overline{A \wedge \bar{T}}$ $(\bar{q})$, on peut sortir $\overline{\bar{B} \wedge \bar{K}}$ $(\bar{p})$

2. Modus tollens (MT)

p → q
$\bar{q}$ ⊢ $\bar{p}$

5. *De Morgan:* $\bar{B}$ est donné par (4). Pour sortir K, il faut donc transformer la conjonction niée en une disjonction

1. De Morgan (DM)

$\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow (\bar{p} \vee \bar{q})$
$\overline{p \vee q} \Leftrightarrow (\bar{p} \wedge \bar{q})$

3. Syllogisme disjonctif (SD)

p v q
$\bar{p}$ ⊢ q ou $\bar{q}$ ⊢ p

6. *On ajoute R par addition*

7. Addition (Add)

p ⊢ p v q

Exercice 4 (p.162)

1. Une partie de la conclusion provient de (1) et (2). Il faut donc **fusionner** les deux expressions par **SH**.

*2. Le lien entres les deux lignes est **B**. Il faut donc éliminer **A** par **Dis**.*

*3. Par Simp on aura **B v C** :*

a. *Imp:* $\bar{B}$ **→ C**
b. *Cont:* $\bar{C}$ **→ B**
c. SH: $\bar{C}$ **→ C**
d. Imp: **C v C**
e. Taut: **C**

4. Imp: Transformer la disjonction en une implication afin d'appliquer un ***SH*** avec (2).

***5.** Cont: On cherche à relier (2) et (6). Pour donc faire un **SH**, il faut avoir* $\bar{C}$ **→ B → C**

***6.** SH: Maintenant on peut éliminer **B** afin de sortir **C**.*

(1)	B v (A Λ C)	
(2)	B → C	⊦ C
(3)	(B v A) Λ (B v C)	Dis 1
(4)	B v A	Simp 3
(5)	B v C	
(6)	$\bar{B}$ → C	Imp 5
(7)	$\bar{C}$ → B	Cont 6
(8)	$\bar{C}$ → C	SH 2;7
(9)	C v C	Imp 8
(10)	**C**	Taut 9

2. Implication (Imp)
(p → q) ⇔ ($\bar{p}$ v q)

9. Contraposition (Cont)
p → q ⇔ $\bar{q}$ → $\bar{p}$

4. Syllogisme hypothétique (SH)
p → q
q → r ⊦ p → r

10. Tautologie (Taut)
p Λ p ⇔ p
p v p ⇔ p

Exercice 5 (p.163)

1. La conclusion provient de (1). Il faut donc **sortir Q.**

*2. Cette expression est en fait une équivalence **P ↔ Q** ou bien **(P → Q) Λ (Q → P)***

3. Une implication entre ***deux termes contraires*** est toujours une tautologie et est réductible au conséquent $\bar{R}$ (voir ex.4).

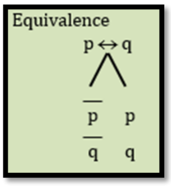
4. Syllogisme Disjonctif: Si on a $\bar{R}$, on a **P**. Ceci nous permet de sortir **Q** à partir de (1).

***5.** Taut & SD:* Si on a $\bar{R}$, on a **P**.

***6.** Equiv:* La conjonction nous permet de simplifier l'expression.

***7.** MP: Si on a **P**, on a **Q**.*

(1)	(P Λ Q) v ($\bar{P}$ Λ $\bar{Q}$)	
(2)	R → $\bar{R}$	
(3)	P v R	⊦ Q
(4)	$\bar{R}$ v $\bar{R}$	Imp 2
(5)	$\bar{R}$	Taut 4
(6)	P	SD 3;5
(7)	P ↔ Q	Equiv 1
(8)	(P → Q) Λ (Q → P)	Equiv 7
(9)	P → Q	Simp 8
(10)	**Q**	MP 6;9



PS. A – MP	$A \rightarrow B$; $A \quad \vdash B$
(1) $A \rightarrow B$	
(2) A	
(3) MP 1;2	

PS. B – MT	$\bar{A} \rightarrow B$; $\bar{B} \quad \vdash A$
(1) $\bar{A} \rightarrow B$	
(2) $\bar{B}$	
(3) MT 1;2	

PS. 1 – **Simp / MP / Conj**	$(A \land B) \rightarrow (D \land E)$; A ; B $\quad \vdash D$
(1) $(A \land B) \rightarrow (D \land E)$	(4) Conj. 2 ;3
(2) A	(5) MP 1 ;4
(3) B	(6) Simp 5
	(7) Simp 5

PS. 2 – Simp / MP / **Add**	$(P \lor C) \rightarrow (R \land D)$; P $\quad \vdash R$
(1) $(P \lor C) \rightarrow (R \land D)$	(4) $R \land D$
(2) P	(5)
(3) Add 2	

PS. 3 – MP / **MT**	$\bar{C} \rightarrow \bar{A}$; $\bar{C}$; $B \rightarrow A \quad \vdash \bar{B}$
(1) $\bar{C} \rightarrow \bar{A}$	(4) MP
(2) $\bar{C}$	(5) MT
(3) $B \rightarrow A$	

PS. 4 – Simp / **DeM** / MT	$\overline{P \lor Q}$; $R \rightarrow Q \quad \vdash \bar{R}$
(1) $\overline{P \lor Q}$	(5) Simp 3
(2) $R \rightarrow Q$	(6) Simp 5
(3)	
(4) Simp 3	

PS. 5 – **NeImp / Imp** / Simp / **SD**	$\overline{A \rightarrow B}$; $Q \vee B$; $C \vee \bar{Q}$ $\vdash C$

PS. 6 – Add / Imp / MP / NeImp / Simp	$(\bar{Q} \rightarrow P) \rightarrow \overline{A \rightarrow B}$; Q $\vdash \bar{A}$

PS. 7 – **Taut** / MP / **SH**	$A \rightarrow B$; $P \rightarrow (B \rightarrow C)$; $P \vee P$ $\vdash A \rightarrow C$

PS. 8 – SD / **ED** / **Exp** / MP	$(A \wedge B) \rightarrow C$; Q ; $A \leftrightarrow Q$; $B \vee P$; $\bar{P}$ $\vdash B \rightarrow C$

Exercices livre page 165:

• PS a – f • PS 1 • PS 2 • PS 3 • PS 4 • PS 5 • PS 6	• PS 18 • PS 19 • PS 20 • PS 21 • PS 28 • PS 30

PS a p.165				**PS b p.165**			
(1)	E → F		• La conclusion provient de (1) et de (3) → fusion par SH • Transformer l'implication en une disjonction	(1)	$(\bar{A} \wedge \bar{B})$ → C		• La conclusion provient de (2) • Il faut donc sortir D • Pour faire cela, il faut avoir B (MP) • Pour avoir B, il faut avoir $\bar{A}$ (SD)
(2)	$\bar{E}$ → D			(2)	B → (A v D)		
(3)	D → R	⊦ F v R		(3)	$\bar{A} \wedge \bar{C}$	⊦ D	
(4)		Cont 1		(4)		Simp 3	
(5)		SH 2;4		(5)		Simp 3	
(6)		SH 3;5		(6)		MP 1	
(7)		Imp 6		(7)		DM 6	
				(8)		SD 4;7	
				(9)		MP 2;8	
				(10)		SD 4;9	

PS c p.165				**PS d p.165**			
(1)	$\bar{P}$ v $\bar{Q}$		• La conclusion provient de (1) et de (3) → fusion par SH et Cont	(1)	P → (Q → R)		• La conclusion provient de (1) • Pour sortir P, il faut transformer (1) → **Exportation :** **P → (Q → R)** **=** **(P ∧ Q) → R**
(2)	$\bar{P}$ → $\bar{R}$			(2)	$\bar{Q}$ → S		
(3)	S → R	⊦ Q → $\bar{S}$		(3)	$\bar{R} \wedge \bar{S}$	⊦ $\bar{P}$	
(4)	P → $\bar{Q}$			(4)		Exp 1	
(5)		Cont 4		(5)	$\bar{R}$	Simp 3	
(6)	$\bar{R}$ → $\bar{S}$			(6)	$\bar{S}$	Simp 3	
(7)				(7)			
				(8)			
				(9)			
				(10)			

PS e p.165			PS f p.165		
(1)	$H \rightarrow E$	La conclusion provient de (1) et de (2)	(1)	$(B \rightarrow A) \wedge (D \rightarrow C)$	DeMorgan : $\overline{\boldsymbol{B \vee D}}$ = $\boldsymbol{\bar{B} \wedge \bar{D}}$
(2)	$E \rightarrow (D \vee P)$		(2)	$(A \vee C) \rightarrow E$	
(3)	$\bar{P}$ $\vdash D \vee \bar{H}$		(3)	$\bar{E}$ $\vdash \overline{B \vee D}$	
(4)			(4)	Simp 1	
(5)			(5)	Simp 1	
(6)	$(\bar{H} \vee D) \vee P$ Ass 5	➔ fusion de (1) et (2) par SH	(6)	MT	**Il faut donc sortir B et D de (1)**
(7)			(7)	DM	
(8)	Com 7	➔ Isoler P	(8)		
			(9)		
			(10)		
			(11)		
			(12)		
			(13)		

PS 28 p.168					
(1)	$(A \rightarrow C) \rightarrow B$				
(2)	$D \vee (B \rightarrow E)$		(11)		**Sortir D de (2)**
(3)	$\overline{\bar{A} \vee E}$		(12)		
(4)	$C \rightarrow (D \wedge F)$ $\vdash \bar{C}$		(13)		
(5)		**Simplifier 3**			
(6)			(14)		**Sortir $\bar{E}$ de (4)**
(7)			(15)		
(8)		**Sortir B de (1)**			
(9)			(16)		**Et voilà ☺**
(10)					

Les règles de déduction (RD)

1. Modus ponens (MP)

$p \rightarrow q$
$p \quad \vdash q$

2. Modus tollens (MT)

$p \rightarrow q$
$\overline{q} \quad \vdash \overline{p}$

3. Syllogisme disjonctif (SD)

$p \vee q$
$\overline{p} \quad \vdash q$

$p \vee q$
$\overline{q} \quad \vdash p$

4. Syllogisme hypothétique (SH)

$p \rightarrow q$
$q \rightarrow r \quad \vdash p \rightarrow r$

5. Simplification (Simpl)

$p \wedge q \quad \vdash p$

$p \wedge q \quad \vdash q$

6. Conjonction (Conj)

p
$q \quad \vdash p \wedge q$

7. Addition (Add)

$p \quad \vdash p \vee q$

$p \quad \vdash q \vee p$

8. Équivalence directe (ÉD)

$p \leftrightarrow q$
$p \quad \vdash q$

$p \leftrightarrow q$
$\overline{p} \quad \vdash \overline{q}$

Les lois logiques principales (LL)

1. Double négation (DN)

$p \Leftrightarrow \overline{\overline{p}}$

2. Commutativité (Com)

$(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$
$(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$
$(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \leftrightarrow p)$

3. Associativité (Ass)

$[p \wedge (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \wedge r] \Leftrightarrow (p \wedge q \wedge r)$
$[p \vee (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \vee r] \Leftrightarrow (p \vee q \vee r)$
$[p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)] \Leftrightarrow [(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r] \Leftrightarrow (p \leftrightarrow q \leftrightarrow r)$

4. Distributivité (Dist)

$[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$
$[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$
$[p \rightarrow (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)]$
$[p \rightarrow (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)]$
$[(p \wedge q) \rightarrow r] \Leftrightarrow [(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)]$
$[(p \vee q) \rightarrow r] \Leftrightarrow [(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)]$

5. De Morgan (DeM)

$\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow (\overline{p} \vee \overline{q})$
$\overline{p \vee q} \Leftrightarrow (\overline{p} \wedge \overline{q})$

6. Contraposition (Contr)

$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{q} \rightarrow \overline{p})$

7. Implication (Impl)

$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{p} \vee q)$

8. Implication niée (NImpl)

$\overline{p \rightarrow q} \Leftrightarrow (p \wedge \overline{q})$

9. Équivalence (Équiv)

$(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$
$(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (\overline{p} \wedge \overline{q})]$

10. Exportation (Exp)

$[(p \wedge q) \rightarrow r] \Leftrightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$

11. Tautologie (Taut)

$(p \wedge p) \Leftrightarrow p$
$(p \vee p) \Leftrightarrow p$

Fiche officielle, utilisation autorisée à l'examen.

1. Définition

La preuve conditionnelle (PC) consiste à admettre une hypothèse (une condition) pour déduire la conclusion.

Dans certains cas, nos règles de déduction et lois logiques ne suffisent pas pour faire la déduction demandée. Dans le cas où la **conclusion est une implication non niée ou réductible à une telle**, on peut procéder à une **preuve conditionnelle**.

Elle consiste à admettre comme hypothèse additionnelle, **l'antécédent de l'implication cherchée**.

Si, sous cette hypothèse, le conséquent peut être déduit comme conclusion intermédiaire, alors celui-ci est vrai comme toute ligne d'une déduction. Mais, par ailleurs, l'implication entière est vraie aussi puisqu'il suffit que le conséquent soit vrai pour qu'une implication soit vraie.

Un raisonnement valide peut être considéré comme une implication vraie dans tous les cas. Si la prémisse 1 et la prémisse 2 etc. sont vraies et si la conclusion sous forme de conditionnelle est vraie, alors on peut ajouter la condition de la conclusion aux autres conditions que sont les prémisses.

- **En fait, on ne fait qu'appliquer la loi logique de l'exportation :**

Tout raisonnement ayant la forme:

Prémisses $\Rightarrow$ Conclusion

si l'on a un raisonnement de la forme:

$(P_1 \wedge P_2 .. \wedge P_n) \Rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$

alors on peut admettre aussi:

$(P_1 \wedge P_2 .. \wedge P_n \wedge \alpha) \Rightarrow \beta$ **par exportation**

et il suffira de démontrer:

β

2. Conseils

Aux conseils donnés pour la preuve formelle on pourra ajouter les considérations suivantes :

a. essayer si la contraposition de la conclusion ne produit pas une hypothèse additionnelle plus «productive»;

b. si le conséquent à déduire par PC n'apparaissait pas dans les prémisses, il ne pourrait être déduit, mais par contraposition il sera la seule hypothèse additionnelle productive;

c. se rappeler que la conclusion peut aussi être une *implication cachée* sous forme d'une:

- disjonction [p v q] (Imp.),
- conjonction niée [$\overline{p \wedge \bar{q}}$] (Ne.Imp.),
- expression distribuée (cf. LL de l'implication);

d. la dernière ligne correspondra **toujours à la conclusion telle qu'elle a été donnée** dans l'exercice. **<u>La ligne comportant la PC n'est donc pas forcément toujours la dernière ligne !</u>** Ceci vaut pour le cas de *l'implication cachée* ci-dessus.

3. <u>Exemple (Ex. 1 p.171)</u>

(1) $P \rightarrow Q$

(2) $(\bar{P} \vee S) \rightarrow \bar{R}$

(3) $\bar{T} \rightarrow (R \vee Q)$

(4) $\bar{T} \vee \bar{U}$

Antécédent
(sera ajouté aux prémisses)

$\vdash \bar{Q} \rightarrow \bar{U}$

Conséquent
(on ne déduit que le conséquent)

Étape 1

La conclusion est une **implication.** On **ajoute l'antécédent** de la conclusion $\bar{Q}$ comme **hypothèse** aux **prémisses.**

(5)	$\bar{Q}$	Hyp PC
(6)	$\bar{P}$	MT 1;5
(7)	$\bar{P} \vee S$	Add 6
(8)	$\bar{R}$	MP 2;7
(9)	$\bar{R} \wedge \bar{Q}$	Conj 5;8
(10)	$\overline{R \vee Q}$	DM 9
(11)	T	MT 3;10
(12)	$\bar{U}$	SD 4;11
(13)	$\bar{Q} \rightarrow \bar{U}$	PC 5-12

L'hypothèse additionnelle nous donne un **<u>instrument supplémentaire</u>** pour travailler les différentes expressions.

Étape 2

La déduction se fait normalement jusqu'à ce qu'on a trouvé le **conséquent** (= la conclusion intermédiaire).

Étape 3

Si nous admettons $\bar{Q}$ (l'antécédent), nous pouvons déduire $\bar{U}$ (le conséquent). C'est donc notre conclusion.

3.1. Complétez l'exercice : PC 2

(1)	$(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (R \wedge S)$	
(2)	$P \rightarrow Q$	$\vdash (\bar{P} \rightarrow \bar{Q}) \rightarrow (\bar{R} \rightarrow S)$
(3)		Hyp PC
(4)	$Q \rightarrow P$	
(5)	$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$	
(6)		Equiv 5
(7)		
(8)	R	Simp 7
(9)	$R \vee S$	Add 8
(10)		
(11)		

4. <u>Exemple (Ex. 2 p.173)</u>

(0) - - -

La conclusion est une implication. Mais **l'antécédent P → Q** mène à rien.

$\vdash \boxed{(P \rightarrow Q)} \rightarrow [(\bar{P} \rightarrow Q) \rightarrow Q]$

Le «raisonnement» ne comporte qu'une «conclusion». Il s'agit en fait d'une loi logique qui rend compte du raisonnement suivant :
$P \rightarrow Q \quad \vdash \quad (\bar{P} \rightarrow Q) \rightarrow Q$

Si on applique une **contraposition**, on a un **antécédent qui pourra être réduite** à une conjonction (Ne.Imp).

$\vdash \overline{(\bar{P} \rightarrow Q) \rightarrow Q} \rightarrow \overline{P \rightarrow Q}$ [Cont]

Étape 1

On **ajoute l'antécédent** de la <u>conclusion transformée</u> $\overline{(\bar{P} \rightarrow Q) \rightarrow Q}$ comme **hypothèse** aux **prémisses.**

(1)	$\overline{(\bar{P} \rightarrow Q) \rightarrow Q}$	Hyp PC
(2)	$(\bar{P} \rightarrow Q) \wedge \bar{Q}$	Ne.Imp 1
(3)	$\bar{P} \rightarrow Q$	Simp 2
(4)	$\bar{Q}$	Simp 2
(5)	P	MT 3;4
(6)	$P \wedge \bar{Q}$	Conj 4;5
(7)	$\overline{P \rightarrow Q}$	Ne.Imp 6
(8)	$\overline{(\bar{P} \rightarrow Q) \rightarrow Q} \rightarrow \overline{P \rightarrow Q}$	PC 1-7
(9)	$(P \rightarrow Q) \rightarrow [(\bar{P} \rightarrow Q) \rightarrow Q]$	Cont 8

Étape 2

La déduction se fait normalement jusqu'à ce qu'on a trouvé le **conséquent** (= la conclusion intermédiaire).

Nous avons trouvé notre conclusion **intermédiaire** !

Étape 3

Si nous admettons l'antécédent, nous pouvons déduire le conséquent.

La preuve doit être reformulée de manière à avoir **<u>exactement</u>** la conclusion demandée !

4.1. Complétez l'exercice : PC 13

(1) $\bar{A}$ v (B ∧ C)	⊦ $\overline{B \wedge C \wedge D} \rightarrow \overline{D \wedge A}$
	⊦2
(2)	Hyp PC
(3)	
(4)	
(5) B ∧ C	SD 1 ;4
(6)	
(7) (D ∧ A) → (B ∧ C ∧ D)	PC 2-6
(8)	

5. **<u>Exemple (Ex. 3 p.176)</u>**

(1) $(K \wedge \bar{S}) \vee (\bar{S} \wedge T)$

(2) $(K \leftrightarrow S) \rightarrow \overline{P \rightarrow R}$

(3) $\overline{K \wedge \bar{S}}$

⊦ $\bar{R} \vee [T \vee (\bar{S} \wedge \bar{K})]$

La PC doit se faire avec une implication, mais **la conclusion est une disjonction.**

⊦ $R \rightarrow [T \vee (\bar{S} \wedge \bar{K})]$ [Imp]

Il faut donc transformer la conclusion par la LL Imp. On aura donc **R** comme antécédent.

Étape 1

On **ajoute l'antécédent** de la conclusion transformée R comme **hypothèse** aux **prémisses.**

(4)	R	Hyp PC
(5)	$\bar{S} \wedge T$	SD 1;3
(6)	T	Simp 5
(7)	$\bar{S}$	Simp 5
(8)	**T v ($\bar{S} \wedge \bar{K}$)**	Add 6
(9)	$R \rightarrow [T \vee (\bar{S} \wedge \bar{K})]$	PC 4-8
(10)	$\bar{R} \vee [T \vee (\bar{S} \wedge \bar{K})]$	Imp 9

Nous pouvons appliquer un SD sans utiliser la ligne (4). En effet, dans cet exemple, **l'hypothèse additionnelle n'a d'autre fonction que d'être la condition de la conclusion intermédiaire.**

Étape 2

La déduction se fait normalement jusqu'à ce qu'on a trouvé le **conséquent** (= la conclusion intermédiaire).

On constate que l'Add. Permet d'ajouter des propositions complexes !

Étape 3

Si nous admettons l'antécédent, nous pouvons déduire le conséquent.

La preuve doit être reformulée de manière à avoir **<u>exactement</u>** la conclusion demandée !

5.1. Complétez l'exercice : PC 8

(1) $\overline{A \wedge B} \rightarrow \bar{C}$

(2) B ↔ D

(3) A → ($\bar{E}$ → F) ⊦ $\bar{C}$ v [(E v F) Λ D]

⊦2

(4) Hyp PC

(5) MT 1 ;4

(6) A

(7) B

(8)

(9) E v F Imp 8

(10) (B → D) Λ (D → B) Equiv 2

(11)

(12)

(13) D

(14) Conj 9 ;13

(15)

(16) $\bar{C}$ v [(E v F) Λ D]

6. Complétez l'exercice : PC 11

(1) P v R ⊦ (P → Q) → [(S → Q) v R]

(2) Hyp PC

(3) $\bar{P}$ → R Imp 1

(4)

(5)

(6) Q v R

(7) Q v R v $\bar{S}$ Add 6

(8) Com, Ass 7

(9)

(10) (P → Q) → [(S → Q) v R] PC 2-9

6.1. Complétez l'exercice : PC 16

(1) $(A \leftrightarrow B) \rightarrow (\bar{C} \vee D)$	
(2) $A \rightarrow B$	$\vdash [\overline{C \rightarrow B} \vee (A \wedge C)] \rightarrow (C \wedge D)$
(3)	Hyp PC
(4) $(C \wedge \bar{B}) \vee (C \wedge A)$	Ne.Imp 3, Comm 3
(5)	
(6) C	Simp 5
(7) $\bar{B} \vee A$	Simp 5
(8)	
(9)	
(10) $A \leftrightarrow B$	Equiv 9
(11)	
(12) D	SD 6;11
(13)	
(14)	PC 3-13

6.2. Complétez l'exercice : PC 10

(1) $(E \vee A) \rightarrow D$	
(2) $B \leftrightarrow \bar{C}$	
(3) $\bar{E} \rightarrow (B \rightarrow A)$	$\vdash \bar{D} \rightarrow C$
(4)	Hyp PC
(5)	
(6) $\bar{E} \wedge \bar{A}$	DM 5
(7) $\bar{E}$	Simp 6
(8) $\bar{A}$	Simp 6
(9)	
(10)	
(11) $(B \rightarrow \bar{C}) \wedge (\bar{C} \rightarrow B)$	Equiv 2
(12)	
(13)	
(14) $\bar{D} \rightarrow C$	PC 4-13

7. <u>Définition</u>

<u>La réduction à l’absurde</u> consiste à montrer que la conclusion est vraie, car il serait absurde d’admettre son contraire.

Pour prouver qu'une conclusion est vraie, donc consistante avec les prémisses données, on va ainsi montrer que la **<u>conclusion niée est inconsistante avec les prémisses</u>** données, c'est-à-dire que **si l’on admet, par hypothèse, <u>la conclusion niée, on peut déduire deux propositions contradictoires</u>**.

Nous aurions ainsi **<u>réduit à l’absurde</u>** l’hypothèse envisagée. Ceci montre alors que l’on ne peut admettre la conclusion niée avec les prémisses et qu’il faut donc admettre son contraire, à savoir la conclusion.

8. <u>Conseils</u>

Comme il s’agit de produire une contradiction, on veillera à :

- **décomposer** systématiquement les expressions complexes en des expressions plus simples jusqu’aux propositions élémentaires
- **vérifier** soigneusement à chaque étape si la déduction ne comporte pas déjà une contradiction, sachant qu’elle peut prendre la forme de :
  - deux propositions élémentaires (comme **A et** $\bar{A}$), ce qui est le cas habituellement recherché
  - deux propositions complexes ainsi **(A → B) ∧ C** est contradictoire avec $\overline{(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \land \mathbf{C}}$
- **arrêter** la déduction dès la production de la 1ère contradiction
- **écrire** la conclusion recherchée

9. <u>Exemple (Ex. 1 p.181)</u>

(1) $(P \land Q) \rightarrow (R \land S)$

(2) $Q \land R$ $\vdash P \rightarrow S$

Étape 1

La conclusion **niée** est ajoutée comme **hypothèse additionnelle** aux **prémisses**.

(3)	$\overline{P \rightarrow S}$	Hyp RA
(4)	$P \land \bar{S}$	Ne.Imp 3
(5)	P	Simp 4
(6)	$\bar{S}$	Simp 4
(7)	Q	Simp 2
(8)	R	Simp 2
(9)	$P \land Q$	Conj 5;7
(10)	$R \land S$	MP 1;9
(11)	R	Simp 10
(12)	S	Simp 10
(13)	$P \rightarrow S$	RA 6,12

Étape 2

Nous déduisons deux expressions **contraires.**

Étape 3

S et $\bar{S}$ se contredisent. La conclusion niée mène à une contradiction ce qui signifie qu'il faut donc admettre le contraire (la conclusion non-niée).

Étape 4

Nous notons la conclusion recherchée avec la remarque RA et **en spécifiant les deux lignes qui sont en contradiction**.

9.1. Complétez l'exercice : RA 13

(1)	$(P \rightarrow S) \rightarrow (Q \rightarrow R)$	
(2)	$P \land Q$	$\vdash S \rightarrow R$
(3)		Hyp RA
(4)		
(5)	S	Simp 4
(6)	$\bar{R}$	Simp 4
(7)	P	Simp 2
(8)	Q	Simp 2
(9)		
(10)	$P \rightarrow S$	Imp 9
(11)		
(12)	R	MP 8 ;11
(13)		

10. Exemple (RA 14 p.280)

(1)	$A \leftrightarrow B$	
(2)	$B \to \overline{C \wedge D}$	
(3)	$(\overline{D} \vee E) \to F$	
(4)	$\overline{F}$	$\vdash \overline{A \wedge C}$
(5)	$A \wedge C$	Hyp RA
(6)	A	Simp 5
(7)	C	Simp 5
(8)	$(A \to B) \wedge (B \to A)$	Equiv 1
(9)	$A \to B$	Simp 8
(10)	B	MP 6;9
(11)	$\overline{\overline{D} \vee E}$	MT 3;4
(12)	$D \wedge \overline{E}$	DM 11
(13)	D	Simp 12
(14)	$C \wedge D$	Conj 7;13
(15)	$\overline{B}$	MT 2;14
(16)	$\overline{A \wedge C}$	RA 10,15

Étape 1

La conclusion **niée (double negation)** est ajoutée comme **hypothèse additionnelle** aux **prémisses**.

Étape 2

Nous déduisons deux expressions **contraires.**

Étape 3

B et $\boldsymbol{\overline{B}}$ se contredisent. La conclusion niée mène à une contradiction ce qui signifie qu'il faut donc admettre le contraire.

Étape 4

Nous notons la conclusion recherchée avec la remarque RA et **en spécifiant les deux lignes qui sont en contradiction.**

10.1. Complétez l'exercice : RA 12

(1)	$\overline{K \to (L \to M)}$	$\vdash \overline{(K \to L) \to M}$
(2)		Hyp RA
(3)		
(4)	K	Simp 3
(5)		Simp 3
(6)		Simp 2
(7)	L	Simp 6
(8)		Simp 6
(9)		MT 2;8
(10)		
(11)	$\overline{L}$	Simp 10
(12)		

11. Complétez l'exercice : RA 8

(1) $[(A \rightarrow B) \wedge C] \rightarrow D$

(2) $A \rightarrow \bar{E}$ $\vdash (C \rightarrow D) \vee \bar{E}$

(3) Hyp RA

(4)

(5)

(6)

(7) $\bar{A}$ MT 2;6

(8) $(A \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow D)$ Exp 1

(9)

(10) $A \wedge \bar{B}$ Ne.Imp 9

(11)

(12)

12. Complétez l'exercice : RA 1

(1) $(P \wedge K) \vee (P \wedge R)$

(2) $H \rightarrow \bar{H}$

(3) $(P \wedge S) \rightarrow \overline{Q \vee T}$

(4) $\bar{S} \rightarrow H$ $\vdash \bar{T}$

(5) Hyp RA

(6)

(7)

(8) S MT4 ;7

(9) Dis 1

(10)

(11) $P \wedge S$ Conj 8 ;10

(12)

(13)

(14)

(15) $\bar{T}$ RA 5 ;14

Ex. 1 – **Simp / MP / Conj**	$(P \wedge Q) \rightarrow (R \wedge S)$; P ; Q ⊢ R	
(1) $(P \wedge Q) \rightarrow (R \wedge S)$	(5)	
(2) P	(6)	MP 1 ;5
(3) Q	(7)	
(4) $\overline{R}$ HypRA	(8)	
	(9)	RA 4 ;7

Ex. 2 – Simp / MP / **Add**	$(A \vee B) \rightarrow (C \wedge D)$; A ⊢ C
(1) $(A \vee B) \rightarrow (C \wedge D)$	(5) $C \wedge D$
(2) A	(6)
(3) HypRA	(7) C RA 3 ;6
(4) Add 2	

Ex. 3 – MP / **MT**	$(R \rightarrow A) \rightarrow (R \rightarrow C)$; $\overline{C}$; R ⊢ $\overline{R \rightarrow A}$
(1) $(R \rightarrow A) \rightarrow (R \rightarrow C)$	(5) MP 1 ;4
(2) $\overline{C}$	(6) MT
(3) R	(7) $\overline{R \rightarrow A}$ RA 3 ;6
(4) HypRA	

Ex. 4 – Simp / **DeM** / MT	$\overline{P \vee Q}$; $\overline{Q} \rightarrow R$ ⊢ R
(1) $\overline{P \vee Q}$	(5) DeM 1
(2) $\overline{Q} \rightarrow R$	(6) Simp 5
(3) $\overline{R}$ HypRA	(7)
(4) MT 2 ;3	

Ex. 5 – Simp / MT / **Add** / DeM	$(Q \vee R) \rightarrow \overline{R \vee A}$; R ⊢ $\overline{Q}$

Ex. 6 – **NeImp** / **Imp** / Simp / MP

$(\overline{P} \vee Q) \rightarrow \overline{A \rightarrow B}$; $P \rightarrow Q$ $\vdash A$

Ex. 7 – Add / Imp / MT / NeImp / Simp

$(P \rightarrow Q) \rightarrow \overline{\overline{A} \rightarrow B}$; Q $\vdash \overline{A}$

Ex. 8 – MP / Imp / **SD**

$(A \rightarrow R) \rightarrow (B \vee C)$; $\overline{C}$; $\overline{A} \vee R$ $\vdash B$

Ex. 9 – **Taut** / MP / **SH**

$A \rightarrow B$; $P \rightarrow (B \rightarrow C)$; $P \vee P$ $\vdash A \rightarrow C$

Ex. 10 – SD / **ED** / **Exp** / MP

$(A \wedge B) \rightarrow C$; Q ; $A \leftrightarrow Q$; $B \vee P$; $\overline{P}$ $\vdash B \rightarrow C$

Exercices supplémentaires, livre p. 183: RA 9 / RA 10 / RA 14