1. <u>Définition</u>

Faire une déduction consiste à montrer **le chemin qui mène des prémisses à la conclusion** d'un raisonnement. Il s'agit de montrer qu'on peut déduire la conclusion indiquée des prémisses données en utilisant certaines règles de déduction et lois logiques :

- **Les règles de déduction (RD)** sont des <u>schémas de raisonnement</u> qui ont pour effet de décomposer une formule complexe en une ou des parties plus simples. Les **RD ne s'appliquent que sur des lignes entières**, jamais sur des parties d'expressions.

- **Les lois logiques (LL)** servent <u>à transformer</u> des propositions données en d'autres propositions plus facilement décomposables à l'aide des règles de déduction. Les **LL peuvent être appliquées sur des parties d'expressions**.

Nous allons distinguer trois sortes de déduction :

a. **La preuve formelle simple (PS)** qui consiste à transformer les prémisses de manière à aboutir à la conclusion.

b. **La preuve conditionnelle (PC)** qui consiste à admettre une hypothèse (condition) pour déduire la conclusion. La preuve conditionnelle se fait toujours avec une implication.

c. **La réduction à l'absurde (RA)** qui consiste à montrer que la conclusion est vraie, car il serait absurde d'admettre son contraire. Pour faire une réduction à l'absurde il faut nier la conclusion et trouver une contradiction.

Pour faire une déduction par preuve formelle, <u>on ne peut pas donner une démarche à suivre définitive et univoque</u>. Une procédure comme pour la vérification par la méthode des arbres n'existe pas.

Afin d'éviter l'utilisation arbitraire de LL et RD et de suivre une démarche compréhensible il faut **indiquer** pour chaque ligne quelle procédure (LL ou RD) a été utilisée et sur quelle(s) ligne(s).

<u>Se donner une stratégie en :</u>

- **identifiant** dans les prémisses la localisation des éléments qui constituent la conclusion,
- **déterminant** ce qu'il faut éliminer pour arriver à ces éléments,
- **se demandant** quelle RD et/ou LL pourrait être utilisée pour cela,
- **imaginant** comment il faut éventuellement recomposer les éléments pour arriver à la conclusion,
- **sachant** que fusionner deux lignes est souvent un moyen pour déduire une conclusion sous forme d'une proposition présente dans deux prémisses différentes.

<u>Utiliser à bon escient les RD, considérant que :</u>

- Certaines règles peuvent servir à ***simplifier*** des expressions complexes, respectivement à ***isoler*** un élément d'une telle expression :

  simplification / syllogisme disjonctif / modus ponens / modus tollens

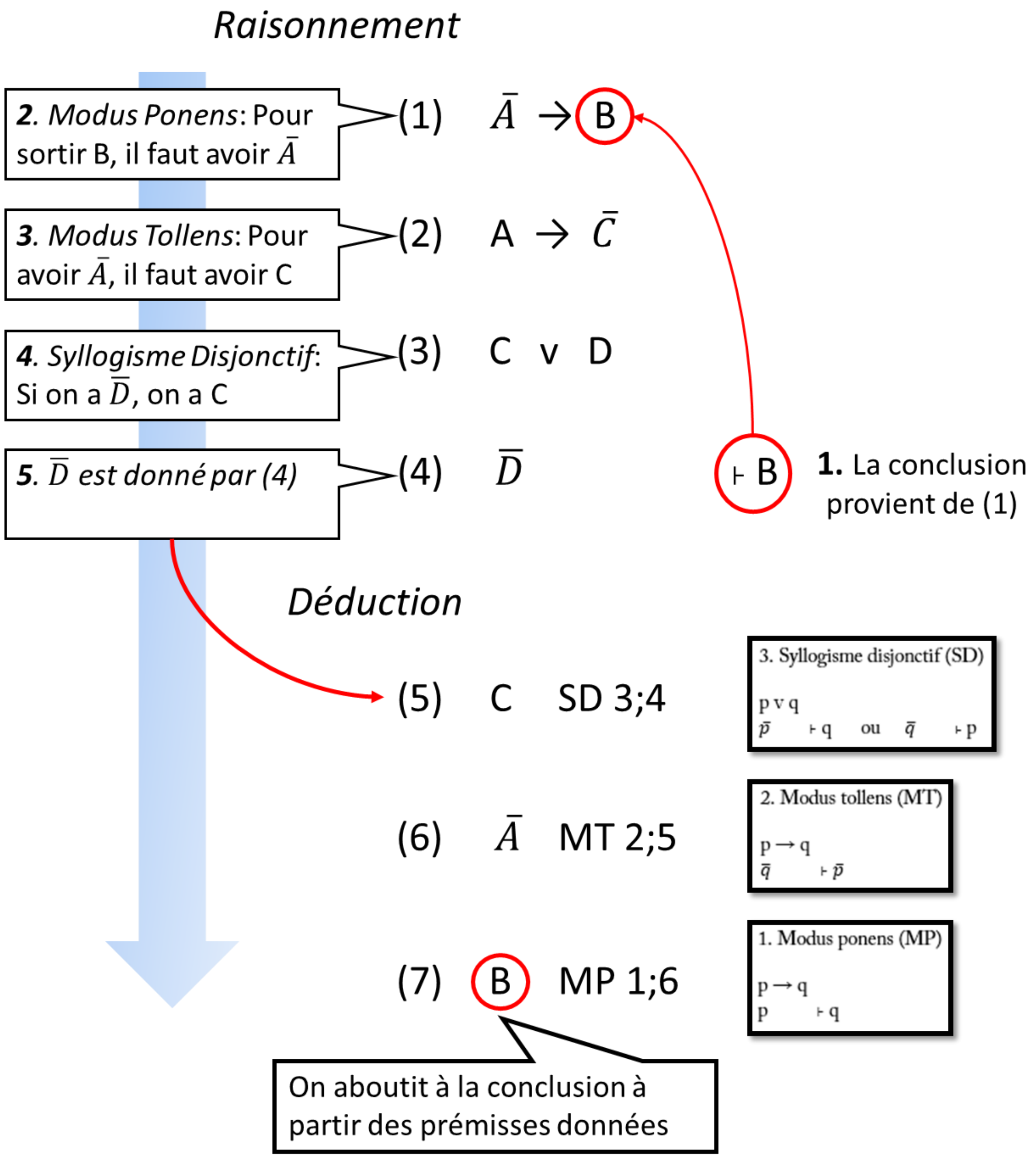
- D'autres règles permettent ***d'adjoindre*** des éléments en expressions plus complexes comme :
  conjonction / addition

- D'autres règles encore permettent de ***fusionner*** deux expressions différentes comme :
  syllogisme hypothétique

<u>On a le plus souvent intérêt à :</u>

- ***réduire*** une conjonction **$p \land q$** par simplification ***en deux expressions p ;q***
- **éliminer les équivalences $p \leftrightarrow q$** (Equiv) pour obtenir des conjonctions **$(p \to q) \land (q \to p)$**
- **transformer une implication niée** $\overline{p \to q}$ pour obtenir une conjonction **$p \land \overline{q}$**
- **trouver des implications du type $p \to \overline{p}$** (SH), puis transformer en disjonction $\overline{p} \lor \overline{p}$ (Imp), pour trouver une tautologie $\overline{p}$ (Taut)

Exercice 1 (p.158)



Exercice 2 (p.159)

Raisonnement

2*. Modus Tollens*: Pour sortir (A v B), il faut avoir $\overline{(\bar{C} \wedge D)}$

(1) $(A \vee B) \rightarrow (\bar{C} \wedge D)$

(2) C

$\vdash \bar{B}$ **1.** La conclusion provient de (1)

3*. Il faut construire* $\overline{(\bar{C} \wedge D)}$ à partir de (2)

a. Addition: C $\boxed{\mathbf{v}\ \bar{D}}$

b. De Morgan: $\overline{(\bar{C} \wedge D)}$

Déduction

(3) $C \vee \bar{D}$ Add 2

7. Addition (Add)
p $\vdash$ p v q

4*. De Morgan:* Transformer une disjonction en une conjonction (et vice versa)

(4) $\overline{\bar{C} \wedge D}$ DM 3

1. De Morgan (DM)
$\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow (\bar{p} \vee \bar{q})$
$\overline{p \vee q} \Leftrightarrow (\bar{p} \wedge \bar{q})$

(5) $\overline{A \vee B}$ MT 1;4

2. Modus tollens (MT)
p → q
$\bar{q}$ $\vdash \bar{p}$

5*. De Morgan:* La conjonction nous permet de simplifier et de sortir $\bar{B}$

(6) $\bar{A} \wedge \bar{B}$ DM 5

1. De Morgan (DM)
$\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow (\bar{p} \vee \bar{q})$
$\overline{p \vee q} \Leftrightarrow (\bar{p} \wedge \bar{q})$

(7) $\bar{B}$ Simp 6

5. Simplification (Simp)
p ∧ q $\vdash$ p
p ∧ q $\vdash$ q

On aboutit à la conclusion à partir des prémisses données

Exercice 3 (p.160)

Raisonnement

2. Modus Tollens: Pour sortir $\overline{\bar{B} \wedge \bar{K}}$, il faut avoir $\overline{A \wedge \bar{T}}$

(1) $(\bar{B} \wedge \bar{K}) \to (A \wedge \bar{T})$

3. Il faut construire $\overline{(A \wedge \bar{T})}$ à partir de (2)

a. *Simp*: $\bar{A}$

b. *Add*: $\bar{A}$ **v T**

c. DM: $\overline{A \wedge \bar{T}}$

(2) $\bar{A} \wedge \bar{B}$ $\vdash$ K v R

1. Une partie de la conclusion provient de (1) mais le terme R ne se trouve pas dans les prémisses. Il faut ajouter **R** par addition après avoir déduit **K**.

Déduction

(3)	$\bar{A}$	Simp 2	5. Simplification (Simp) p ∧ q ⊦ p p ∧ q ⊦ q
(4)	$\bar{B}$	Simp 2	
(5)	$\bar{A}$ v T	Add 3	7. Addition (Add) p ⊦ p v q
(6)	$\overline{A \wedge \bar{T}}$	DM 5	1. De Morgan (DM) $\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow (\bar{p} \vee \bar{q})$ $\overline{p \vee q} \Leftrightarrow (\bar{p} \wedge \bar{q})$
(7)	$\overline{\bar{B} \wedge \bar{K}}$	MT 1;6	2. Modus tollens (MT) p → q $\bar{q}$ ⊦ $\bar{p}$
(8)	B v K	DM 7	1. De Morgan (DM) $\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow (\bar{p} \vee \bar{q})$ $\overline{p \vee q} \Leftrightarrow (\bar{p} \wedge \bar{q})$
(9)	K	SD 4;8	3. Syllogisme disjonctif (SD) p v q $\bar{p}$ ⊦ q ou $\bar{q}$ ⊦ p
(10)	K **v R**	Add 9	7. Addition (Add) p ⊦ p v q

***4.** Modus Tollens: Après avoir construit* $\overline{A \wedge \bar{T}}$ ($\bar{q}$), on peut sortir $\overline{\bar{B} \wedge \bar{K}}$ ($\bar{p}$)

***5.** De Morgan:* $\bar{B}$ est donné par (4). Pour sortir K, il faut donc transformer la conjonction niée en une disjonction

***6.** On ajoute R par addition*

Exercice 4 (p.162)

***2.** Le lien entres les deux lignes est **B**. Il faut donc éliminer **A** par **Dis**.*

*3. Par Simp on aura **B v C** :*

a. *Imp:* $\bar{B} \rightarrow$ **C**
b. *Cont:* $\bar{C} \rightarrow$ **B**
c. SH: $\bar{C} \rightarrow$ **C**
d. Imp: **C v C**
e. Taut: **C**

4. Imp: Transformer la disjonction en une implication afin d'appliquer un ***SH*** avec (2).

***5.** Cont: On cherche à relier (2) et (6). Pour donc faire un **SH**, il faut avoir* $\bar{C} \rightarrow$ **B → C**

***6.** SH: Maintenant on peut éliminer **B** afin de sortir **C**.*

1. Une partie de la conclusion provient de (1) et (2). Il faut donc **fusionner** les deux expressions par **SH**.

(1)	B v (A ∧ C)	
(2)	$B \rightarrow C$	⊢ C
(3)	(B v A) ∧ (B v C)	Dis 1
(4)	B v A	Simp 3
(5)	B v C	Simp 3
(6)	$\bar{B} \rightarrow C$	Imp 5
(7)	$\bar{C} \rightarrow B$	Cont 6
(8)	$\bar{C} \rightarrow C$	SH 2;7
(9)	C v C	Imp 8
(10)	**C**	Taut 9

2. Implication (Imp)
$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{p} \vee q)$

9. Contraposition (Cont)
$p \rightarrow q \Leftrightarrow \bar{q} \rightarrow \bar{p}$

4. Syllogisme hypothétique (SH)
$p \rightarrow q$
$q \rightarrow r \qquad \vdash p \rightarrow r$

10. Tautologie (Taut)
$p \wedge p \Leftrightarrow p$
$p \vee p \Leftrightarrow p$

Exercice 5 (p.163)

2.** Cette expression est en fait une équivalence **P ↔ Q** ou bien **(P → Q) ∧ (Q → P)

3. Une implication entre ***deux termes contraires*** est toujours une tautologie et est réductible au conséquent $\bar{R}$ (voir ex.4).

4. Syllogisme Disjonctif: Si on a $\bar{R}$, on a **P**. Ceci nous permet de sortir **Q** à partir de (1).

***5.** Taut & SD:* Si on a $\bar{R}$, on a **P**.

***6.** Equiv:* La conjonction nous permet de simplifier l'expression.

***7.** MP: Si on a **P**, on a **Q**.*

1. La conclusion provient de (1). Il faut donc **sortir Q**.

(1)	$(P \wedge Q) \vee (\bar{P} \wedge \bar{Q})$	
(2)	$R \rightarrow \bar{R}$	
(3)	P v R	⊢ Q
(4)	$\bar{R} \vee \bar{R}$	Imp 2
(5)	$\bar{R}$	Taut 4
(6)	P	SD 3;5
(7)	$P \leftrightarrow Q$	Equiv 1
(8)	$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$	Equiv 7
(9)	$P \rightarrow Q$	Simp 8
(10)	**Q**	MP 6;9

Equivalence
$p \leftrightarrow q$
∧
$\bar{p} \quad p$
$\bar{q} \quad q$