1. Définition

La preuve conditionnelle (PC) consiste à admettre une hypothèse (une condition) pour déduire la conclusion.

Dans certains cas, nos règles de déduction et lois logiques ne suffisent pas pour faire la déduction demandée. Dans le cas où la **conclusion est une implication non niée ou réductible à une telle**, on peut procéder à une **preuve conditionnelle**.

Elle consiste à admettre comme hypothèse additionnelle, **l'antécédent de l'implication cherchée**.

Si, sous cette hypothèse, le conséquent peut être déduit comme conclusion intermédiaire, alors celui-ci est vrai comme toute ligne d'une déduction. Mais, par ailleurs, l'implication entière est vraie aussi puisqu'il suffit que le conséquent soit vrai pour qu'une implication soit vraie.

Un raisonnement valide peut être considéré comme une implication vraie dans tous les cas. Si la prémisse 1 et la prémisse 2 etc. sont vraies et si la conclusion sous forme de conditionnelle est vraie, alors on peut ajouter la condition de la conclusion aux autres conditions que sont les prémisses.

- **En fait, on ne fait qu'appliquer la loi logique de l'exportation :**

Tout raisonnement ayant la forme:

Prémisses $\Rightarrow$ Conclusion

si l'on a un raisonnement de la forme:

$(P_1 \wedge P_2 .. \wedge P_n) \Rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$

alors on peut admettre aussi:

$(P_1 \wedge P_2 .. \wedge P_n \wedge \alpha) \Rightarrow \beta$ **par exportation**

et il suffira de démontrer:

β

2. **Conseils**

Aux conseils donnés pour la preuve formelle on pourra ajouter les considérations suivantes :

a. essayer si la contraposition de la conclusion ne produit pas une hypothèse additionnelle plus «productive»;

b. si le conséquent à déduire par PC n'apparaissait pas dans les prémisses, il ne pourrait être déduit, mais par contraposition il sera la seule hypothèse additionnelle productive;

c. se rappeler que la conclusion peut aussi être une *implication cachée* sous forme d'une:

- disjonction [p v q] (Imp.),
- conjonction niée [$\overline{p \wedge \bar{q}}$] (Ne.Imp.),
- expression distribuée (cf. LL de l'implication);

d. la dernière ligne correspondra **toujours à la conclusion telle qu'elle a été donnée** dans l'exercice. **<u>La ligne comportant la PC n'est donc pas forcément toujours la dernière ligne !</u>** Ceci vaut pour le cas de *l'implication cachée* ci-dessus.

3. **<u>Exemple (Ex. 1 p.171)</u>**

(1) $P \rightarrow Q$

(2) $(\bar{P} \vee S) \rightarrow \bar{R}$

(3) $\bar{T} \rightarrow (R \vee Q)$

(4) $\bar{T} \vee \bar{U}$

Antécédent
(sera ajouté aux prémisses)

$\vdash \bar{Q} \rightarrow \bar{U}$

Conséquent
(on ne déduit que le conséquent)

Étape 1

La conclusion est une **implication**. On **ajoute l'antécédent** de la conclusion $\bar{Q}$ comme **hypothèse** aux **prémisses.**

(5)	$\bar{Q}$	Hyp PC
(6)	$\bar{P}$	MT 1;5
(7)	$\bar{P} \vee S$	Add 6
(8)	$\bar{R}$	MP 2;7
(9)	$\bar{R} \wedge \bar{Q}$	Conj 5;8
(10)	$\overline{R \vee Q}$	DM 9
(11)	T	MT 3;10
(12)	$\bar{U}$	SD 4;11
(13)	$\bar{Q} \rightarrow \bar{U}$	PC 5-12

L'hypothèse additionnelle nous donne un **<u>instrument supplémentaire</u>** pour travailler les différentes expressions.

Étape 2

La déduction se fait normalement jusqu'à ce qu'on a trouvé le **conséquent** (= la conclusion intermédiaire).

Étape 3

Si nous admettons $\bar{Q}$ (l'antécédent), nous pouvons déduire $\bar{U}$ (le conséquent). C'est donc notre conclusion.

3.1. Complétez l'exercice : PC 2

(1)	$(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (R \wedge S)$	
(2)	$P \rightarrow Q$	$\vdash (\bar{P} \rightarrow \bar{Q}) \rightarrow (\bar{R} \rightarrow S)$
(3)		Hyp PC
(4)	$Q \rightarrow P$	
(5)	$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$	
(6)		Equiv 5
(7)		
(8)	R	Simp 7
(9)	R v S	Add 8
(10)		
(11)		

4. <u>Exemple (Ex. 2 p.173)</u>

(0) - - -

La conclusion est une implication. Mais **l'antécédent P → Q** mène à rien.

$\vdash \boxed{(P \rightarrow Q)} \rightarrow [(\bar{P} \rightarrow Q) \rightarrow Q]$

Le «raisonnement» ne comporte qu'une «conclusion». Il s'agit en fait d'une loi logique qui rend compte du raisonnement suivant :

$P \rightarrow Q \quad \vdash \quad (\bar{P} \rightarrow Q) \rightarrow Q$

Si on applique une **contraposition**, on a un **antécédent qui pourra être réduite à une** conjonction (Ne.Imp).

$\vdash \overline{(\bar{P} \rightarrow Q) \rightarrow Q} \rightarrow \overline{P \rightarrow Q}$ [Cont]

Étape 1

On **ajoute l'antécédent** de la <u>conclusion transformée</u> $\overline{(\bar{P} \rightarrow Q) \rightarrow Q}$ comme **hypothèse** aux **prémisses.**

(1)	$\overline{(\bar{P} \rightarrow Q) \rightarrow Q}$	Hyp PC
(2)	$(\bar{P} \rightarrow Q) \wedge \bar{Q}$	Ne.Imp 1
(3)	$\bar{P} \rightarrow Q$	Simp 2
(4)	$\bar{Q}$	Simp 2
(5)	P	MT 3;4
(6)	$P \wedge \bar{Q}$	Conj 4;5
(7)	$\overline{P \rightarrow Q}$	Ne.Imp 6
(8)	$\overline{(\bar{P} \rightarrow Q) \rightarrow Q} \rightarrow \overline{P \rightarrow Q}$	PC 1-7
(9)	$(P \rightarrow Q) \rightarrow [(\bar{P} \rightarrow Q) \rightarrow Q]$	Cont 8

Nous avons trouvé notre conclusion **intermédiaire** !

Étape 2

La déduction se fait normalement jusqu'à ce qu'on a trouvé le **conséquent** (= la conclusion intermédiaire).

Étape 3

Si nous admettons l'antécédent, nous pouvons déduire le conséquent.

La preuve doit être reformulée de manière à avoir **<u>exactement</u>** la conclusion demandée !

4.1. Complétez l'exercice : PC 13

(1) $\bar{A}$ v (B ∧ C)	⊦ $\overline{B \wedge C \wedge D} \rightarrow \overline{D \wedge A}$
	⊦2
(2)	Hyp PC
(3)	
(4)	
(5) B ∧ C	SD 1 ;4
(6)	
(7) (D ∧ A) → (B ∧ C ∧ D)	PC 2-6
(8)	

5. **<u>Exemple (Ex. 3 p.176)</u>**

(1) $(K \wedge \bar{S}) \vee (\bar{S} \wedge T)$

(2) $(K \leftrightarrow S) \rightarrow \overline{P \rightarrow R}$

(3) $\overline{K \wedge \bar{S}}$

La PC doit se faire avec une implication, mais **la conclusion est une disjonction.**

⊦ $\bar{R} \vee [T \vee (\bar{S} \wedge \bar{K})]$

Il faut donc transformer la conclusion par la LL Imp. On aura donc **R** comme antécédent.

⊦ $R \rightarrow [T \vee (\bar{S} \wedge \bar{K})]$ [Imp]

Étape 1

On **ajoute l'antécédent** de la conclusion transformée R comme **hypothèse** aux **prémisses.**

(4)	R	Hyp PC
(5)	$\bar{S} \wedge T$	SD 1;3
(6)	T	Simp 5
(7)	$\bar{S}$	Simp 5
(8)	**$T \vee (\bar{S} \wedge \bar{K})$**	Add 6
(9)	$R \rightarrow [T \vee (\bar{S} \wedge \bar{K})]$	PC 4-8
(10)	$\bar{R} \vee [T \vee (\bar{S} \wedge \bar{K})]$	Imp 9

Nous pouvons appliquer un SD sans utiliser la ligne (4). En effet, dans cet exemple, **l'hypothèse additionnelle n'a d'autre fonction que d'être la condition de la conclusion intermédiaire**.

Étape 2

La déduction se fait normalement jusqu'à ce qu'on a trouvé le **conséquent** (= la conclusion intermédiaire).

On constate que l'Add. Permet d'ajouter des propositions complexes !

Étape 3

Si nous admettons l'antécédent, nous pouvons déduire le conséquent.

La preuve doit être reformulée de manière à avoir **<u>exactement</u>** la conclusion demandée !

5.1. Complétez l'exercice : PC 8

(1) $\overline{A \wedge B} \rightarrow \bar{C}$	
(2) B $\leftrightarrow$ D	
(3) A $\rightarrow$ ($\bar{E}$ $\rightarrow$ F)	$\vdash \bar{C}$ v [(E v F) $\wedge$ D]
	$\vdash$2
(4)	Hyp PC
(5)	MT 1 ;4
(6) A	
(7) B	
(8)	
(9) E v F	Imp 8
(10) (B $\rightarrow$ D) $\wedge$ (D $\rightarrow$ B)	Equiv 2
(11)	
(12)	
(13) D	
(14)	Conj 9 ;13
(15)	
(16) $\bar{C}$ v [(E v F) $\wedge$ D]	

6. Complétez l'exercice : PC 11

(1) P v R	$\vdash$ (P $\rightarrow$ Q) $\rightarrow$ [(S $\rightarrow$ Q) v R]
(2)	Hyp PC
(3) $\bar{P}$ $\rightarrow$ R	Imp 1
(4)	
(5)	
(6) Q v R	
(7) Q v R v $\bar{S}$	Add 6
(8)	Com, Ass 7
(9)	
(10) (P $\rightarrow$ Q) $\rightarrow$ [(S $\rightarrow$ Q) v R]	PC 2-9

6.1. Complétez l'exercice : PC 16

(1) (A $\leftrightarrow$ B) $\rightarrow$ ($\bar{C}$ v D)	
(2) A $\rightarrow$ B	$\vdash$ [$\overline{C \rightarrow B}$ v (A $\wedge$ C)] $\rightarrow$ (C $\wedge$ D)
(3)	Hyp PC
(4) (C $\wedge$ $\bar{B}$) v (C $\wedge$ A)	Ne.Imp 3, Comm 3
(5)	
(6) C	Simp 5
(7) $\bar{B}$ v A	Simp 5
(8)	
(9)	
(10) A $\leftrightarrow$ B	Equiv 9
(11)	
(12) D	SD 6;11
(13)	
(14)	PC 3-13

6.2. Complétez l'exercice : PC 10

(1) (E v A) $\rightarrow$ D	
(2) B $\leftrightarrow$ $\bar{C}$	
(3) $\bar{E}$ $\rightarrow$ (B $\rightarrow$ A)	$\vdash$ $\bar{D}$ $\rightarrow$ C
(4)	Hyp PC
(5)	
(6) $\bar{E}$ $\wedge$ $\bar{A}$	DM 5
(7) $\bar{E}$	Simp 6
(8) $\bar{A}$	Simp 6
(9)	
(10)	
(11) (B $\rightarrow$ $\bar{C}$) $\wedge$ ($\bar{C}$ $\rightarrow$ B)	Equiv 2
(12)	
(13)	
(14) $\bar{D}$ $\rightarrow$ C	PC 4-13